

Chapitre 4

Éléments algébriques

Dans ce chapitre, nous réviserons divers éléments algébriques tout en poussant jusqu'à la résolution de systèmes d'équations, laquelle n'est abordée au Québec qu'en secondaire IV (élèves de 15 ans).

À la fin de ce chapitre, vous trouverez un mini-test qui est constitué de problèmes extraits du volume *Mathématique Soleil 4*, un des deux manuels les plus utilisés en secondaire IV.

Matériel

-Environ 50 jetons;
-Cartons d'environ 10cm X 10 cm, de deux couleurs différentes (les x et les y), environ 6 de chaque couleur.

Évaluation

Dans ce chapitre, votre enfant démontre :

Sa compréhension : Lorsqu'il associe une droite à son équation.

Son raisonnement : Lorsqu'il tient compte des données du problème pour trouver sa solution.

Son efficacité : Lorsqu'il calcule correctement les différentes variables d'une équation.

Sa capacité à communiquer : Lorsqu'il situe correctement un ensemble de points dans un graphe cartésien.

Problème 1

Remettez à l'enfant les cartons « x » et les jetons. Dites-lui : « Deux amis possèdent chacun 20 \$ et s'apprêtent à aller magasiner. » Demandez-lui de prendre deux ensembles de 20 jetons et de les disposer devant lui de sorte que 20 jetons soient à sa gauche et 20 jetons à sa droite.

- a) Mentionnez que celui dont les jetons sont à droite a acheté 2 objets identiques. Demandez à l'enfant de prendre 2 carrés de carton pour illustrer ces objets. Demandez à l'enfant de trouver le prix payé pour chaque objet s'il lui reste encore 8\$. (Solution : 6 jetons ou 6 \$).Demandez-lui de disposer également sur les deux cartons 12 jetons pour montrer le prix de chaque objet acheté.

En terminant, l'enfant devrait donc avoir devant lui, à sa droite 2 carrés de carton avec 6 jetons sur chacun et 8 jetons et à sa gauche 20 jetons.

- b) Cette fois, l'enfant place 3 carrés à sa gauche ainsi que 2 jetons et, à sa droite, 14 jetons. Mentionnez que cette fois, chacun des deux amis avait 14 \$ et qu'un d'entre eux a acheté 3 objets identiques et qu'il a encore 2 \$.

Quel est le prix de chaque objet ? (4 \$)

Notez $3x + 2 = 14$, donc $x = 4$ en montrant que $3x$ désigne le prix payé pour les 3 objets, 2, l'argent qui reste à cet acheteur et 14, l'argent de l'autre acheteur et, en même temps, l'argent qu'avait le premier acheteur au début, d'où $3x + 2 = 14$.

De plus, comme chaque objet x coûtait 4 \$, on a noté $x = 4$ (ce qui signifie que $1x = 4$), qui est la façon d'écrire des mathématiciens : lorsqu'il n'y a qu'un seul x , le chiffre 1 est facultatif et n'est habituellement pas écrit. De la même façon, on dit « cent vingt » et non « un cent vingt », mais on dira « deux cent vingt ».

Problème 2

Écrivez d'abord la première équation et demandez à l'enfant de l'illustrer avec son matériel. Ensuite, demandez-lui de trouver le prix de chaque objet acheté et notez-le tel que la solution l'indique. Procédez de la même façon pour les autres équations.

- a) $17 = 3x + 2$ (Sol. : $x = 5$)
- b) $x + x + 10 = 18$ (Sol. : $x = 4$)
- c) $21 = 4x + 2x + 3$ (Sol. : $x = 3$)
- d) $5x + 5 = 15$ (Sol. : $x = 2$)
- e) $4x = 20$ (Sol. : $x = 5$)

Continuez au besoin.

Problème 3

- a) Écrivez : $3x = x + 8$ (Sol. : ($x = 4$))

Demandez d'abord à l'enfant d'illustrer cette équation avec son matériel. Pour la suite, demandez-lui de trouver la valeur de x et l'argent disponible avant ces achats. Évitez de lui dire quoi faire, donnez-lui la chance de faire quelques tentatives.

S'il ne réussit pas, ou s'il parvient par hasard ou par essais et erreurs, remplacez le matériel comme au début et cachez ensuite un carton de chaque côté. Il reste donc d'illustré : $2x = 8$, d'où $x = 4$. Enlevez ce qui cache les deux cartons et demandez à l'enfant ce qu'il obtiendra s'il place aussi 4 jetons sur chacun de ces cartons. Il

peut maintenant dire le prix de chaque objet acheté et la somme d'argent disponible au début pour chaque acheteur.

Pendant qu'il travaille, au besoin, rappelez-lui :

1. Que tous les objets coûtent le même prix ;
2. Que le signe = mentionne que chaque acheteur possède la même valeur tout comme ils possédaient tous les deux, au début, la même somme.

Procédez de la même façon avec :

b) $2x + 12 = 5x$ (Sol. : $x = 4$)

c) $3x + 6 = 4x + 1$ (Sol. : $x = 4$)

d) $5x + 4 = 7x$ (Sol. : $x = 2$)

e) $x + 12 = 8$ (Voir la note.)

Note : Impossible ? Pas vraiment ! Demandez à l'enfant de mentionner combien d'argent avait chacun avant de partir magasiner (8 \$). En sortant du magasin, un de ces deux clients a maintenant 12 \$ et un carré x . Que vaut ce carré x ? (-4 \$) En fait, le client est entré pour emprunter 4 \$. Sur le carton x , il est écrit : « Je reconnais avoir emprunté 4 \$ à... Signature : Client A .» (Sol. : $x = -4$).

Problème 4

- a) Mentionnez que, cette fois, le client A achète deux objets différents pour lesquels il paie 12 \$. Écrivez donc $x + y = 12$.

Demandez à l'élève de trouver les valeurs de x et de y , en dollars entiers.

Notez les possibilités comme suit :

x	1	2	3	...	9	10	11
y	11	10	9	...	3	2	1

- b) Même travail avec :

$$x + 2 = y$$

Solution

x	1	2	3	4	...
y	3	4	5	6	...

c) $3x = 6y$

Solution

x	2	4	6	...
y	1	2	3	...

d) $2x + 6 = y + 1$

Solution

x	1	2	3	...
y	7	9	11	...

Problème 5

Écrivez $3x - 2 = x + 4$

Mentionnez à l'enfant que les mathématiciens utilisent les signes + et - pour identifier des oppositions. Ainsi :

- Additionner (+) s'oppose à soustraire (-) ;
- Cinq degrés au-dessus de 0°C (+5°C) et cinq degrés en-dessous de 0°C (-5°C) ;
- 5 ans avant J.-C. (-5) et 5 ans après J.-C. (+5) ;
- Un gain de 10 \$ (+10 \$) et une perte de 10 \$ (-10 \$).

Dans $3x - 2 = x + 4$, le + est utilisé pour indiquer que le terme qui le suit (3x, 2, x et 4 sont des termes) est situé du bon côté du signe = alors que le - indique que le terme qui le suit est du mauvais côté. Donc $3x - 2 = x + 4$ est équivalent à $3x = x + 4 + 2$ ou à $3x = x + 6$. Bref, un sacripant s'est amusé à changer des nombres de côté, mais un astucieux et gentil lutin nous a averti en plaçant des + et des - devant chaque terme afin que nous sachions si le terme doit demeurer là ou s'il doit changer de côté du signe d'égalité.

Problème 6

Demandez à l'enfant de réorganiser les équations suivantes afin que tous les signes + puissent être remplacés par des signes - .

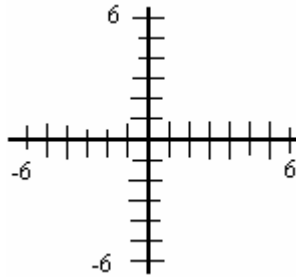
- a) $-2x + 4y = 5 - 3y$ (Sol. : $7y = 2x + 5$)
 b) $6x - 13 = -7$ (Sol. : $6x + 7 = 13$)
Note : $6x = 6$ constitue aussi une solution valable.
 c) $8 - x = 2y + 1$ (Sol. : $8 = x + 2y + 1$)
 d) $6x - 7y = 9y - 2x$ (Sol. : $8x = 16y$)

Continuez au besoin.

Problème 7

Écrivez $x + y = 6$

Rappelez qu'il existe plusieurs solutions à cette équation. Bien sûr, il y a $x = 1$ et $y = 5$, mais aussi $x = 1 \frac{1}{2}$ et $y = 4 \frac{1}{2}$. En fait il existe une infinité de solutions. Ajoutez que, pour ne pas avoir à noter tous les nombres qui représentent des solutions à cette équation, les mathématiciens ont inventé une représentation géniale. Tracez un plan cartésien comme le suivant :



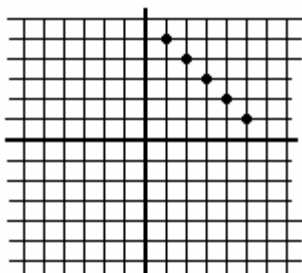
Montrez qu'ici aussi les signes + et - représentent des oppositions : à gauche (-) et à droite (+) ; en haut (+) et en bas (-).

Après avoir trouvé et noté quelques solutions à $x + y = 6$ sous la forme de :

x	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1

Placez sur le graphe des points qui représentent ces solutions : les valeurs de x sur l'horizontale, les valeurs de y sur la verticale.

Vous obtiendrez :



Note : Attendez-vous à ce que l'enfant reconnaisse rapidement que ces points sont situés sur la même droite. Certains enfants s'écrient, après que le troisième point soit situé : « Tic, tac, toc ». Ajoutez que les mathématiciens désignent cette droite par l'équation $x + y = 6$ et que tous les points situés sur cette droite – Montrez, par exemple où se situe $x = 1 \frac{1}{2}$ et $y = 4 \frac{1}{2}$. – ou sur ses prolongements, constituent des solutions à $x + y = 6$. – Montrez par exemple, le point $(-2, 8)$ et le point $(8, -2)$. – Remplacez ensuite x et y par -2 et 8 puis par 8 et -2 pour obtenir $-2 + 8 = 6$ donc $8 = 6 + 2$ après avoir remplacé «2» de l'autre côté, et $8 - 2 = 6$ qui devient aussi $8 = 6 + 2$.

Mentionnez enfin que la droite $x + y = 6$ peut être désignée par diverses équations équivalentes telles : $x = 6 - y$, $x + y - 6 = 0$, etc.

Soumettez diverses équations à votre enfant et demandez-lui de trouver des équations équivalentes. Par exemple, soumettez $2x - 3 = -4y + 8$. Il existe plusieurs équations équivalentes dont : $2x + 4y - 3 = 8$; $2x + 4y = 8 + 3$ (ou 11); $-3 - 8 = -2x - 4y$, etc.

Problème 8

Vous allez maintenant travailler en coopération avec votre enfant. Vous devez trouver les valeurs de x et de y qui satisfont à une équation et votre enfant devra faire le même travail pour une seconde équation.

Par la suite, vous tracerez les deux droites sur un même graphe.

Les possibilités suivantes pourront alors survenir :

- les droites sont parallèles et aucun point (x,y) ne satisfait les deux équations ;
- les droites se croisent et le point où elles se croisent, appelé l'intersection, satisfait aux deux équations ;
- les droites sont les mêmes car leurs équations sont équivalentes.

S'il existe, quel est le point d'intersection des paires de droites suivantes ?

- $x - 3 = y$ et $x + y = 9$
- $2x = y$ et $y - x = 4$
- $x + y = 9$ et $2x + 2y = 18$

Note : Cette fois, c'est la même droite. Demandez à votre enfant d'illustrer avec ses jetons et cartons l'équation $x + y = 9$. Il aura donc un carton x et un carton y à gauche et 9 jetons à droite. À votre tour d'illustrer $2x + 2y = 18$. Demandez à votre enfant s'il est possible que si $x + y = 9$ alors $2x + 2y = 18$. (**Solution** : Oui, on double les quantités de chaque côté.)

- $x + 2y = 12$ et $2x + y = 12$
- $x - 2y = 0$ et $2x + y = 10$

Note : Ces droites sont perpendiculaires.

- $x = 4$ et $y = 5$

Note : Quelle est la droite où x est toujours égal à 4 ? (**Solution** : Il s'agit d'une parallèle à l'axe des y . $x = 4$ et $y = 5$ se croisent donc à $x = 4$ et $y = 5$ et sont perpendiculaires.)

g) $x + y = 10$ et $x + y = 8$

h) $2x - y = 5$ et $2x - y = 0$

i) $x = 3y + 1$ et $x = 3y + 5$

Les trois dernières paires de droites étaient des parallèles. Reprenez ces trois paires d'équations et dites à votre enfant que ces paires d'équations se ressemblent et que chaque fois que cette ressemblance existe, les droites sont parallèles. Quelle est cette ressemblance ? (**Solution** : Si on ne tient pas compte de la constante, c'est-à-dire du nombre qui est seul (pour (g) 10 et 8 ; pour (h) 5 et 0 et pour (i) 1 et 5) le reste est identique.)

Solutions

- a) $x = 6, y = 3$
- b) $x = 4, y = 8$
- c) C'est la même droite.
- d) $x = 4, y = 4$
- e) $x = 4$ et $y = 2$ (perpendiculaires)
- f) $x = 4$ et $y = 5$ (perpendiculaires)
- g) Ce sont des parallèles.
- h) Ce sont des parallèles.
- i) Ce sont des parallèles.

Problème 9

Voici des problèmes tirés du volume *Mathématique Soleil 4*, pages 110 et 111 (Guérin 1985, 700 pages). Mettez l'élève au défi de résoudre ces systèmes d'équations, c'est-à-dire de trouver le point x, y qui est le même pour les deux équations d'une même paire, tout comme doivent le faire les élèves de secondaire IV, donc d'environ 15 ans. Laissez-le choisir sa façon de résoudre les problèmes.

- a) $2x - y = 4$ et $x + y = 5$
- b) $3x = 9$ et $x + y = 5$
- c) $2x - y = 4$ et $x + y = 10$
- d) $y = 2$ et $x + y = 5$
- e) $8x - 3y = 18$ et $2x + 3y = 42$

Et maintenant, pour les champions ! Au besoin, rappelez que $x + y = 8$ revient au même que $8 = x + y$ ou que $-8 = -x - y$ ou que $-x - y = -8$.

En effet, si les deux équipes changent ensemble de côtés du signe =, c'est comme lorsque deux équipes changent, à la demie, de côté de terrain. $x + y = 8$ pour $8 = x + y$, c'est comme $3 + 5 = 8$ et $8 = 3 + 5$

- f) $3x - 4y = 4$ et $2x - 3y = 2$
- g) $2x + 3y = 19$ et $3x - 5y = 0$
- h) $x + y = 7$ et $3x - 4y = 7$
- i) $3x + 4y = 10$ et $6x - 12y = 0$

Solutions

Encouragez l'enfant à tracer les droites pour vérifier ses solutions.

- a) $x = 3, y = 2$
- b) $x = 3, y = 2$
- c) $x = 4 \frac{2}{3}, y = 5 \frac{1}{3}$
- d) $x = 3, y = 2$
- e) $x = 6, y = 10$
- f) $x = 4, y = 2$
- g) $x = 5, y = 3$
- h) $x = 5, y = 2$
- i) $x = 2$ et $y = 1$