Chapitre 2

LA FONCTION MULTIPLICATIVE

<u>Première activité</u>

Construire des dallages de forme carrée.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer les nombres carrés à des dallages de forme carrée.**
2. **Trouver la racine d'un carré.**
3. **Identifier les premiers nombres carrés.**
4. **Associer le symbolisme de la racine carrée aux éléments correspondant d'un carré.**

Matériel

Environ 50 centicubes par élève.

<u>Problème 1</u>

Prends neuf cubes. Imagine que ces cubes sont des tuiles avec lesquelles tu veux recouvrir un plancher. Il faut que tu prennes les 9 cubes et que tu fasses un plancher carré. Construis ce plancher.

<u>Notes</u> :1. Certains élèves feront un plancher carré avec seulement 8 cubes en laissant un trou au centre. Mentionnez-leur que ce plancher est très dangereux, qu'il faut boucher ce trou.
2. N'insistez pas trop, car les problèmes suivants ont pour but de mieux faire comprendre cette idée d'un dallage carré.

<u>Problème 2</u>

a) Fais un carré avec moins de 9 cubes. (**Solution** : Il faut 4 cubes.)
b) Fais un carré encore plus petit. (**Solution** : Un cube suffit. Certains élèves trouvent cela très drôle.)

<u>Problème 3</u>

Maintenant, tu vas faire des carrés de plus en plus grands.

a) Fais un carré avec juste un peu plus qu'un cube. (**Solution** : 4 cubes.)
b) Fais un carré juste un peu plus grand. (**Solution** : 9 cubes.)
c) Un autre qui soit juste un peu plus grand. (**Solution** : 16 cubes.)
d) Encore un peu plus grand.

Note : Au lieu d'un carré de 25 cubes certains élèves font un rectangle de 20 cubes. À l'œil, il est facile de comparer des côtés formés de 1, 2, 3, ou 4 cubes. Cependant, à partir de 5 ou 6 cubes, il faut les compter. Voici comment certains élèves feront ces dénombrements.

1				
2				
3				
4	1	2	3	4

D'abord 1 à 4 verticalement, ensuite 1 à 4 horizontalement en négligeant le coin déjà compté sur le côté vertical.

La difficulté de l'élève est ici de considérer qu'un cube fait partie de deux côtés à la fois. Cela est typique chez l'élève qui n'est pas opératoire concret. Il faudra régler cette difficulté en plaçant l'élève en conflit cognitif, c'est-à-dire en contradiction avec lui-même.

- Rappelez donc à l'élève qu'il y a 4 cubes de chaque côté du «carré».
- Mentionnez-lui que vous voulez vérifier une deuxième fois.
- Demandez-lui donc de commencer par compter les cubes du côté situé en haut.
  (**Solution** : L'élève devrait trouver 5 facilement.)
- Étonnez-vous, rappelez qu'il y avait 4 cubes auparavant.
- Demandez à l'élève s'il en a ajouté.
- Mentionnez-lui que vous n'avez touché à rien.
- Et maintenant, demandez-lui de dénombrer les cubes du côté droit.
  (**Solution** : S'il fait la même erreur, ce qui est très possible, il trouvera 3 cubes. Manifestez encore votre étonnement et laissez-le réfléchir seul.

S'il ne vous mentionne pas avant 5 minutes que le cube du coin doit être compté pour les deux côtés, n'insistez pas et attendez au moins 24 heures avant de reprendre ce problème. Si, après 24 heures, la difficulté persiste, et si vous avez réalisé les activités de la première partie de ce guide, il y a un problème qu'il faut régler. Si l'élève n'a que 5 ou 6 ans, ce n'est pas encore dramatique, mais il faut absolument s'occuper de cette difficulté avant tout.

Si l'élève ne fréquente pas une classe régulière de première année, cessez ce travail pendant quelques semaines (1 à 3 semaines). Après ce délai, reprenez cette activité au problème 1, idéalement en intervention individuelle. Si le problème persiste, consultez la section « Passage à l'opératoire » de ce guide.

Si l'élève fréquente une classe régulière, demandez l'aide d'un orthopédagogue ou des parents. Dans un cas comme dans l'autre, il faudra commencer par les activités de la section « Passage à l'opératoire », puis refaire les activités de la première partie de ce guide. Il est inutile et risqué d'aller plus loin pour le moment ou d'aborder des notions telle la numération positionnelle. Ce serait placer l'élève en échec et le forcer à recourir surtout à sa mémoire afin de réussir en mathématiques.

e) Encore un peu plus grand (**Solution** : 36 cubes. Il est possible que la difficulté mentionnée précédemment en (d) ne se manifeste qu'ici. Procédez alors comme décrit au problème (d) dans la note.

Problème 4

a) Écrivez $\sqrt{16}$. Mentionnez à l'élève que cela signifie qu'il faut faire un carré avec 16 cubes et trouver la grandeur du côté du carré. Lorsqu'il aura trouvé, complétez $\sqrt{16} = 4$.

NOTE : Ne craignez rien, il n'y a qu'aux adultes que la racine carrée fait peur.

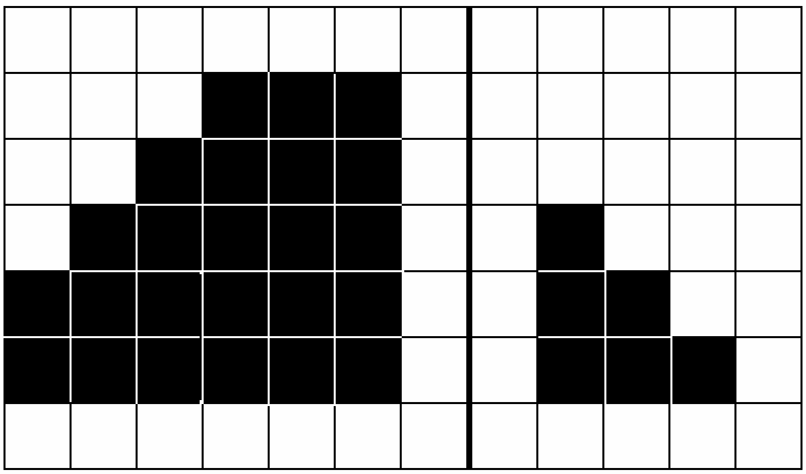
b) Écrivez maintenant $\sqrt{4}$ et rappelez au besoin ce que ces symboles représentent, comme précédemment en (a). (**Solution** : $\sqrt{4} = 2$.)
c) Et maintenant $\sqrt{10}$ (**Solution** : Cela ne fonctionne pas. Mentionnez à l'élève que 10 n'est pas un nombre carré.)
d) Demandez-lui de trouver 4 nombres carrés et de vous le prouver avec ses cubes. Pour chaque cas trouvé, notez l'égalité correspondante.
(**Solution** : Quatre nombres parmi : 1, 4, 9, 16, 25 36,…)

Vous pouvez, à partir de maintenant, administrer l'épreuve écrite que présente la fiche 5.

FICHE 5

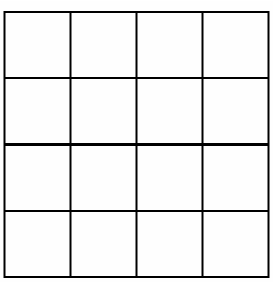
NOM : ____

1. Complète les deux carrés de la grille suivante.

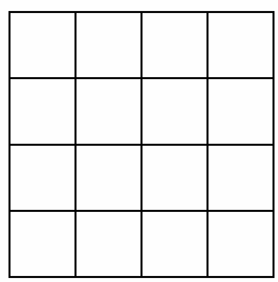


2. Complète les égalités suivantes et dessine les carrés qui prouvent tes réponses.

a) $\sqrt{4}$ = ________



b) $\sqrt{\quad}$ = 3



Deuxième activité

Construire des dallages rectangulaires dont l'aire et la largeur sont connues.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la division au rectangle.**
2. **Trouver la longueur d'un rectangle connaissant son aire et sa largeur.**
3. **Associer le symbolisme de la division aux éléments correspondants du rectangle.**

Matériel

Environ 50 centicubes par élève.

Problème 5

Note : Nous allons maintenant aborder la division. Évitez de parler de partage ou de mesure. En fait, certaines divisions servent à résoudre des problèmes de partage, d'autres à résoudre des problèmes de mesure. Cependant, tel n'est pas toujours le cas et, si nous associons exclusivement la division au partage et à la mesure pendant quelques mois ou plus, nous préparons les élèves à ne pas comprendre certaines divisions de fractions (1 $ ÷ ½ = 2 $), certaines divisions sur les relatifs ((+12) ÷ (-4) = (-3)) et certaines divisions sur les nombres algébriques ($a^2 \div a = a$). La seule image mentale pouvant illustrer toutes les divisions est le rectangle. Nous allons donc la construire et l'établir fortement dès le début de l'apprentissage et l'entretenir tout au long de la scolarisation.

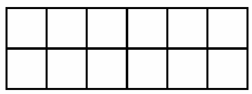
Lorsque cette image sera solidement acquise, il sera possible, et non nuisible, d'associer la division au partage et à la mesure.

Si les divisions mentionnées dans cette note vous causent des problèmes ou des surprises, vous êtes une victime de plus d'un enseignement dans lequel la division a été associée pratiquement exclusivement durant quelques années au partage et à la mesure. Au moins 95% des adultes ont ces difficultés. Comment croire que les élèves actuels réussiront mieux que leurs aînés à contourner ce piège ?

a) Prends 12 cubes. Avec ces cubes, tu vas recouvrir le plancher rectangulaire d'un corridor. Ce corridor doit avoir 2 cubes de largeur. Trouve la longueur de plancher que tu peux couvrir avec tes 12 cubes. (**Solution** : 6.)

Note : Si l'élève éprouve des difficultés, tracez trois des côtés du corridor en respectant sa largeur. Vous tracerez donc une figure telle :

Et l'élève dallera cette figure pour obtenir :



Faites remarquer à l'élève que le corridor mesure 6 côtés de carrés de longueur.
IMPORTANT : Désormais vous décrirez les largeurs et longueurs des rectangles en parlant de « côtés de carrés ». Donc, ce rectangle, qui utilise 12 carrés, a une largeur de 2 côtés de carrés et une longueur de 6 côtés de carrés.

b) Prends maintenant 16 cubes et recouvre un plancher de corridor de 2 côtés de carrés de largeur. Quelle longueur de corridor peux-tu recouvrir ? (**Solution** : 8 côtés de carrés. Au besoin, procédez comme en (a) en traçant 3 des côtés du rectangle. Pour tous les problèmes portant sur la division, utilisez la même stratégie si l'élève ne comprend pas le problème. Agissez ainsi jusqu'à ce qu'il comprenne.)
c) Prends encore 12 cubes, mais cette fois le plancher à couvrir est large comme 3 côtés de carrés. Quelle longueur de plancher peux-tu couvrir ? (**Solution** : 4)
d) Et si tu utilises 15 cubes pour couvrir un plancher de 3 côtés de carrés de largeur, quelle longueur de plancher peux-tu couvrir ? (**Solution** : 5)

Problème 6

Note : Nous allons maintenant simplifier le langage utilisé jusqu'ici en adoptant progressivement les termes et symboles mathématique appropriés.

a) Écrivez $\frac{8}{2}$. Cela signifie qu'il faut prendre 8 carrés et couvrir un corridor de 2 unités de longueur, une unité de longueur, c'est comme la longueur d'un côté du carré.
(**Solution** : Notez $\frac{8}{2} = 4$ en rappelant que cela signifie qu'avec 8 carrés, on peut faire un corridor de 2 unités de largeur et de 4 unités de longueur.)
b) Écrivez $\frac{16}{4}$ et procédez comme en (a). (**Solution** : $\frac{16}{4} = 4$)
c) Même problème avec $\frac{15}{5}$; $\frac{7}{1}$ (voilà un corridor bien étroit) ; $\frac{10}{2}$; $\frac{14}{7}$.
(**Solutions** : $\frac{15}{5} = 3$; $\frac{7}{1} = 7$; $\frac{10}{2} = 5$; $\frac{14}{7} = 2$.)

Problème 7

a) Écrivez 12 ÷ 3. Voici une autre façon d'écrire $\frac{12}{3}$. Avec ces deux façons, les mathématiciens veulent dire qu'il faut recouvrir avec 12 carrés un plancher qui a 3 unités de largeur. Quelle est la longueur qui sera recouverte ? (**Solution** : 12 ÷ 3 = 4)

b) Écrivez 9 ÷ 3 et demandez quelle longueur de ce plancher sera couverte. (**Solution** : 9 ÷ 3 = 3.) Faites remarquer que ce rectangle est spécial, que c'est un carré. Rappelons-nous qu'un carré est un rectangle puisqu'il est un quadrilatère (4 côtés) qui a 4 angles droits. C'est un rectangle « amélioré » puisqu'il a aussi 4 côtés égaux.

c) Continuez avec 15 ÷ 5 ; 5 ÷ 1 ; 18 ÷ 3 ; 20 ÷ 4 ; 11 ÷ 11 .
(**Solutions** : 15 ÷ 5 = 3 ; 5 ÷ 1 = 5 ; 18 ÷ 3 = 6 ; 20 ÷ 4 = 5 ; 11 ÷ 11 = 1.)

Mentionnez que les mathématiciens ont d'autres façons de décrire le même genre de problèmes et que vous allez voir ces façons bientôt. Nous pensons ici à 3 X 5 = 15 par exemple.

IMPORTANT

La division par zéro est impossible. L'analogie avec le rectangle permet de le comprendre. En effet, si nous avons un rectangle dont l'aire est plus grande que zéro, il devient impossible de construire ou même d'imaginer ce rectangle si sa largeur doit être zéro. En conséquence, diviser par zéro est impossible.

Impossible, sauf si le nombre à diviser par zéro est zéro lui-même. Dans ce cas, il faut construire ou imaginer un rectangle dont l'aire est zéro et dont la largeur est aussi zéro. Nous avons alors le choix en ce qui concerne la longueur de ce rectangle. En effet, quelle que soit cette longueur, si la largeur du rectangle est zéro, alors l'aire du rectangle sera zéro. En conséquence, la division de zéro par zéro est dite indéterminée.

Il en découle que zéro est considéré comme multiple de tout nombre puisque n X 0 = 0.

Troisième activité

Construire des dallages rectangulaires dont l'aire est connue.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la multiplication au rectangle.**
2. **Associer les facteurs d'un nombre aux côtés du rectangle.**
3. **Trouver les divers facteurs d'un nombre.**
4. **Distinguer les nombres premiers des nombres composés.**
5. **Trouver un facteur commun à deux nombres.**
6. **Associer le symbolisme de la multiplication aux éléments correspondants du rectangle.**

Matériel

Environ 50 centicubes par élève.

<u>Problème 8</u>

a) Prends 12 cubes et construis un dallage rectangulaire avec ces 12 cubes. Garde ta solution intacte pendant que tu solutionneras les problèmes suivants.
b) Prends 12 autres cubes et fais un rectangle différent du rectangle trouvé en (a).
c) Prends 12 autres cubes et fais un rectangle différent des rectangles (a) et (b).

<u>Notes</u> :
1. Un rectangle est différent d'un autre lorsque sa forme est différente. La position n'a aucune importance.
2. Trois rectangles différents existent avec 12 cubes : 1 sur 12, 2 sur 6 et 3 sur 4.

Notez maintenant la description de chacun des rectangles trouvés comme suit : 1 x 12 = 12; 2 x 6 = 12 et 3 x 4 = 12. Mentionnez que 1, 12, 2, 6, 3 et 4 représentent les longueurs des côtés des rectangles.

Mentionnez aussi qu'avec un côté dont la longueur serait 5 ou 7 ou 11… on ne peut ***faire*** un rectangle de 12 carrés. C'est pour cette raison que 5, 7 et 11 ne sont pas facteurs (facteur signifie celui qui fait) de 12 alors que 1, 2, 3, 4, 6 et 12 le sont.

Ajoutez aussi qu'on peut écrire 3 x 4 ou 4 x 3 pour décrire un des rectangles car 3 x 4 et 4 x 3 sont synonymes.

<u>Note</u> : On dit que la multiplication est commutative, ce qui signifie que les facteurs d'un produit peuvent être « commutés » ou peuvent changer de position entre eux. Ainsi 3 x 4 = 4 x 3 indistinctement. Voir dans 3 x 4, 3 paquets de 4 et dans 4 x 3, 4 paquets de 3 est trop restrictif. L'inverse est aussi possible. En associant la multiplication au rectangle plutôt qu'à des paquets, les élèves comprennent plus facilement que 3 x 4 et 4 x 3 représentent le même rectangle et une même réalité.

Problème 9

Demandez aux élèves de factoriser, c'est-à-dire de construire tous les rectangles possibles avec chacun des nombres suivants. Pour chaque rectangle, notez l'égalité appropriée.

a) 15 (1 x 15 = 15 ; 3 x 5 = 15)
b) 8 (1 x 8 = 8 ; 2 x 4 = 8)
c) 10 (1 x 10 = 10 ; 2 x 5 = 10)
d) 16 (1 x 16 = 16; 2 x 8 = 16; 4 x 4 = 16)
e) 13 (1 x 13 = 13)

Problème 10

Le problème 9(e) ci-dessus ne présentait qu'une seule solution car 13 est un nombre premier.

- Trouve les nombres premiers plus grands que 3 et plus petits que 22. (**Solution** : 5, 7, 11, 13, 17 et 19)
- Écris l'égalité qui décrit chacun de ces rectangles. (**Solution** : 1 x 5 = 5, 1 x 7 = 7,…)

Problème 11

Voici des égalités qui représentent des carrés ou des rectangles. Construis chacune de ces figures en justifiant tes solutions.

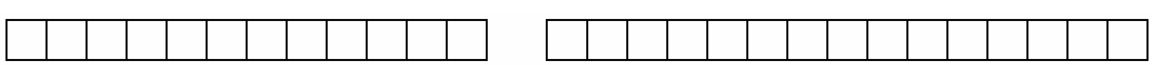
a)	$\sqrt{9}$	b)	$\frac{14}{2} = 7$	c)	3 x 2 = 6
d)	10 ÷ 5 = 2	e)	$\sqrt{4}$	f)	5 x 3 = 15
g)	$\frac{16}{8} = 2$	h)	7 x 1 = 7	i)	12 ÷ 3 = 4

(**Solutions** : a) carré de 3 par 3 ; b) rectangle de 7 pat 2 ; etc.)

Continuez au besoin.

Problème 12

Prends un ensemble de 12 cubes et un autre ensemble de 15 cubes. Avec ces deux ensembles, il est possible de faire des rectangles qui ont exactement la même largeur. Voici une possibilité.



$\underline{1}$ x 12 = 12 $\underline{1}$ x 15 = 15

Ces deux rectangles ont un côté mesurant exactement une unité de longueur.

Trouve l'autre possibilité en construisant un autre rectangle avec 12 cubes et un autre rectangle avec 15 cubes de sorte que ces deux nouveaux rectangles aient la même largeur.

(**Solution** : Les rectangles 3 x 4 = 12 et 3 x 5 = 15)

Mentionnez que 3 est un facteur commun à 12 et à 15.

Problème 13

Comme au problème 12, il faudra construire tous les rectangles de même largeur en utilisant les paires de nombres qui suivent :

a) 6 et 8 (**Solution** : 1 x 6 = 6 et 1 x 8 = 8 ; 2 x 3 = 6 et 2 x 4 = 8)
b) 5 et 15 (**Solution** : 1 x 5 = 5 et 1 x 15 = 15 ; 1 x 5 = 5 et 3 x 5 = 15)
c) 6 et 18 (**Solution** : 1 x 6 = 6 et 1 x 18 = 18; 2 x 3 = 6 et 2 x 9 = 18; 2 x 3 = 6 et 3 x 6 = 18; 1 x 6 = 6 et 3 x 6 = 18)
d) 7 et 11 (**Solution** : 1 x 7 = 7 et 1 x 11 = 11)
e) 4 et 8 (**Solution** : 1 x 4 = 4 et 1 x 8 = 8 ; 2 x 2 = 4 et 2 x 4 = 8; 1 x 4 = 4 et 2 x 4 = 8)

Note : L'élève devrait avoir constaté que le nombre 1 est facteur commun chaque fois parce que nous pouvons placer tous les nombres sous la forme d'un rectangle dont la largeur est de 1 unité.

Quatrième activité

Construire des dallages rectangulaires dont la longueur et la largeur sont connues.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la multiplication au rectangle.**
2. **Associer les facteurs d’un nombre aux côtés du rectangle.**
3. **Trouver l’aire d’un rectangle dont les côtés sont connus.**
4. **Associer le symbolisme de la multiplication aux éléments correspondants du rectangle.**

Matériel

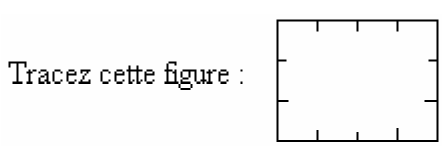
Environ 50 centicubes par élève.

Problème 14

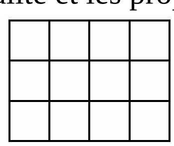
Note : Même si traditionnellement la multiplication est enseignée avant la division et avant la racine carrée, c’est la racine carrée qui est la plus facile à comprendre et à maîtriser. Il est donc possible que, même si ce qui précède a été réussi, l’élève éprouve des difficultés avec les problèmes qui suivent.

Si tel est le cas, tracez un rectangle qui possède les dimensions requises, attirez l’attention de l’élève sur les dimensions des côtés du rectangle à daller et montrez que ces dimensions correspondent aux nombres de l’égalité à compléter. Demandez ensuite à l’élève de daller le rectangle pour trouver combien il lui faudra de carrés (ou cubes).

Exemple pour 3 x 4 = _______



Lorsque le dallage aura été réalisé, complétez l’égalité 3 x 4 = 12 et montrez la correspondance existant entre chaque nombre de l’égalité et les propriétés du dallage construit.



a) Construis un rectangle dont la largeur sera de 3 unités et dont la longueur sera de 4 unités. Complète ensuite l’égalité suivante 3 x 4 = _______.

b) Même question pour :

- 2 x 7 = ________
- 4 x 5 = ________
- 3 x 6 = ________
- 8 x 1 = ________
- 4 x 4 = ________

Continuez au besoin.

<u>Cinquième activité</u>

Construire des dallages rectangulaires superposés.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la multiplication et la division de fractions à la superposition de deux rectangles.**
2. **Associer la racine carrée d’une fraction à la superposition de deux carrés.**
3. **Associer le symbolisme de la multiplication de fractions aux éléments de deux rectangles superposés.**
4. **Associer le symbolisme de la division de fractions aux éléments de deux rectangles superposés.**
5. **Associer le symbolisme de la racine carrée d’une fraction aux éléments de deux carrés superposés.**
6. **Multiplier deux fractions.**
7. **Diviser deux fractions.**
8. **Trouver la racine carrée d’une fraction.**

Matériel

Environ 50 centicubes par élève.

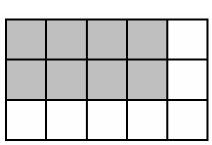
<u>Notes</u> :

1. Les problèmes qui suivent visent à consolider et à généraliser ce qui a été vu jusqu’ici. De plus, ils permettent d’aborder, d’illustrer et de comprendre les mêmes opérations sur les fractions.
2. Il n’y a aucun problème à faire ces problèmes avant d’effectuer les mêmes opérations sur les nombres entiers à deux chiffres.
3. En multipliant et en divisant des fractions dès à présent, on évitera de laisser croire à l’élève que la multiplication est une addition répétée et que la division est un partage ou une mesure.

<u>Problème 15</u>

a) Racontez à l’élève que le plancher d’une salle de bain rectangulaire est recouvert de 15 tuiles carrées. Demandez-lui de construire ce plancher. Mentionnez ensuite qu’il y a un bain sur ce plancher, que ce bain est rectangulaire et qu’il couvre exactement 8 tuiles. Demandez-lui de fabriquer un « bain » avec 8 cubes et de le placer sur le « plancher » de la salle de bain.

   Voici ce à quoi devrait ressembler ce qui a été construit :



Écrivez l'égalité suivante en la commentant étape par étape : $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$. Le bain recouvre 2 des 3 rangées du plancher ($\frac{2}{3}$) ; le bain recouvre 4 des 5 tuiles de chacune de ces deux rangées ($\frac{4}{5}$). Le bain recouvre 8 des 15 tuiles du plancher ($\frac{8}{15}$). Ajoutez le symbole « x » et le symbole « = » en soulignant que 2 x 4 = 8 représente le bain et que 3 x 5 = 15 représente le plancher.

<u>**Notes**</u> :

1. Toutes les multiplications et toutes les divisions de fractions peuvent être illustrées en comparant deux rectangles. Un d'entre eux sera décrit par les numérateurs et l'autre par les dénominateurs.
2. Dans les problèmes suivants, illustrez les multiplications en évoquant par exemple l'espace occupé par un tapis sur un plancher, par une annonce sur une page de journal, par une fenêtre sur un mur, par une maison sur un terrain…

b) Inspirez-vous donc des thèmes de la note précédente ou d'autres thèmes de votre cru pour faire comparer les deux rectangles formés de :

- 9 carrés et 20 carrés (**Solution** : $\frac{1}{2} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{20}$; $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$; entre autres.)
- 5 carrés et 18 carrés (**Solution** : $\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$; $\frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$; $\frac{1}{1} \times \frac{5}{18} = \frac{5}{18}$.)
- 1 carré et 5 carrés (**Solution** : $\frac{1}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$.)

3 carrés et 12 carrés (**Solution** : $\frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{12}$; $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$; $\frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{12}$.)

<u>**Note**</u> : Considérant les thèmes présentés, on ne pourra ici illustrer cette situation par $\frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{12}$ car la fenêtre ne rentrerait pas dans le mur, à moins que ce soit l'annonce qui soit trop grande… Nous illustrerons cependant une telle égalité par d'autres exemples.

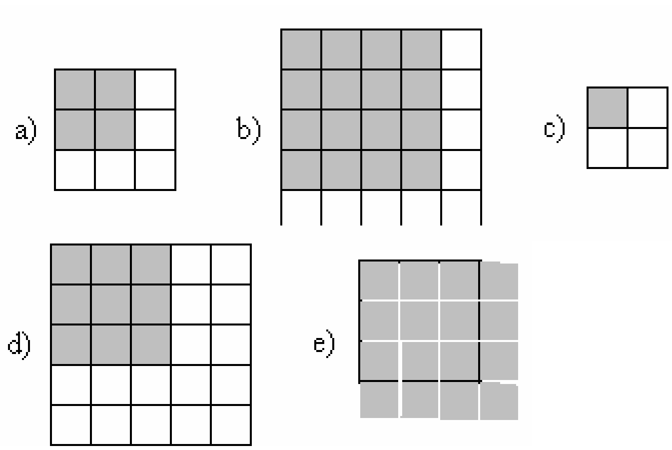
<u>Problème 16</u>

Voici des égalités qui peuvent représenter l'espace pris par un jardin fait sur un terrain.

a) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ b) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ c) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ e) $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

Solutions



En (e) le jardin… déborde sur le terrain du voisin. Ça arrive !

Problème 17

Complète les égalités suivantes en expliquant chaque réponse.

a) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} =$ b) $\frac{2}{3} \times \frac{\ }{\ } = \frac{6}{15}$ c) $\sqrt{\frac{4}{16}} =$

d) $\frac{20}{30} \div \frac{4}{6} =$ e) $\frac{9}{16} \div \frac{3}{8} =$ f) $\frac{3}{7} \times \frac{2}{3} =$

g) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} =$ h) $\frac{14}{20} \div \frac{2}{5} =$ i) $\frac{12}{21} \div \frac{3}{3} =$

j) $\sqrt{\frac{1}{9}}$

Solutions

a) $\frac{12}{35}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{2}{4}$; d) $\frac{5}{5}$; e) $\frac{3}{2}$; f) $\frac{6}{21}$; g) $\frac{2}{15}$; h) $\frac{7}{4}$; i) $\frac{4}{7}$; j) $\frac{1}{3}$.

Notes :

1. Il n’est pas question de simplifier les réponses. Cela ferait perdre de vue la représentation concrète de ces opérations.

2. Diviser directement les numérateurs et les dénominateurs entre eux ne conduit à aucune erreur et est toujours possible puisque la première fraction peut toujours être remplacée par une fraction équivalente. Ainsi, la division $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ peut être remplacée par $\frac{30}{45} \div \frac{3}{5} = \frac{10}{9}$.
3. Il est aussi possible d'effectuer une division de fractions en plaçant les deux fractions sur un même dénominateur : $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ devient $\frac{10}{15} \div \frac{9}{15} = \frac{10}{9}$. Nous sommes alors dans une situation similaire aux divisions suivantes :
   - 10 m ÷ 9m = $\frac{10}{9}$
   - 10 \$ ÷ 9 \$ = $\frac{10}{9}$
   - 10 unités ÷ 9 unités = $\frac{10}{9}$
   - 10 centaines ÷ 9 centaines = $\frac{10}{9}$
   - 10 quinzièmes ÷ 9 quinzièmes = $\frac{10}{9}$
4. L'algorithme de division de fractions qui consiste à multiplier le premier nombre par l'inverse du second peut se démontrer comme suit :

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}}{\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$$

Cette division peut se comprendre grâce aux analogies suivantes :

- 12 \$ ÷ 3 = 4 \$ (12 \$ est le triple de 4 \$)
- 12 \$ ÷ 2 = 6 \$ (12 \$ est le double de 6 \$)
- 12 \$ ÷ ½ = 24 \$ (12 \$ est la moitié de 24 \$, d'où 12 \$ x 2 = 24 \$)
- $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{10}{9}$ ($\frac{2}{3}$ représente $\frac{3}{5}$ de $\frac{10}{9}$ puisque $\frac{2}{3} \div 3$ ou $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$, soit $\frac{2}{9}$, représente $\frac{1}{5}$ du nombre cherché. Et alors $\frac{2}{3} \div 3 \times 5$ ou $\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$ soit $\frac{10}{9}$ représente le nombre cherché.

Sixième activité

Construire des dallages rectangulaires dont l'aire et la largeur sont connues.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la division au rectangle.**
2. **Trouver la longueur d'un rectangle connaissant son aire et sa largeur.**
3. **Associer le symbolisme de la division aux éléments correspondants du rectangle.**
4. **Associer l'algorithme de division aux éléments correspondants du rectangle.**
5. **Diviser des nombres à deux ou trois chiffres par un nombre à un chiffre.**

Matériel pour chaque élève

- 50 centicubes ;
- 25 bâtonnets à café coupés pour qu'ils mesurent 10 cm de longueur.

Problème 18

Nous allons maintenant aborder la division et la multiplication de nombres à plusieurs chiffres par un nombre à un chiffre. Comme il est plus facile pour les élèves de comprendre la division, c'est ce qui sera fait en premier. Ensuite, la construction représentant la division sera interprétée sous diverses formes symboliques incluant la multiplication.

- Avec ton matériel, illustre le nombre 25. Fais comme si un bâtonnet représente 1 dizaine ou 10 centicubes. Chaque centicube représente une unité.

- Trouve une autre façon de représenter 25 avec les bâtonnets et les centicubes.

- Trouve une troisième façon de représenter 25 avec les bâtonnets et les centicubes.
  (**Solution** pour les trois problèmes précédents : 25 centicubes ; 1 bâtonnet et 15 centicubes ; 2 bâtonnets et 5 centicubes.)

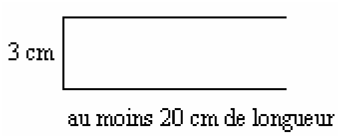
Au besoin, donnez d'autres problèmes comme ceux qui précèdent afin de vous assurer que les élèves perçoivent bien qu'un nombre peut être représenté de multiples façons au moyen de ce matériel.

Problème 19

Demandez aux élèves de représenter le nombre 39 avec le moins de matériel possible.
(**Solution** : 3 bâtonnets et 9 centicubes.)

- Imagine que tes bâtonnets et tes centicubes sont des dalles avec lesquelles tu dois construire un trottoir. Ce trottoir doit être large comme le côté de 3 centicubes. Trouve la longueur de ce trottoir si tu utilises tout ton matériel, c'est-à-dire tes 3 bâtonnets et tes 9 centicubes.

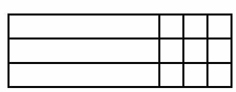
Note : Certains élèves ont parfois de la difficulté à comprendre les données de ce problème. Dans ce cas, tracez trois côtés d'un rectangle de 3 centimètres de largeur et demandez aux élèves de le couvrir avec leur matériel en commençant à gauche et sans laisser d'espaces libres.

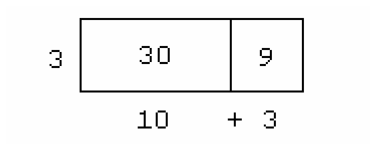


En corrigeant la solution, encouragez vos élèves à utiliser d'abord les bâtonnets et ensuite les centicubes bien que d'autres arrangements soient possibles.

Au tableau, dessinez les deux cadres qui représentent la solution en montrant les liens entre la représentation concrète construite par les élèves et les représentations imagées et symboliques que vous avez tracées. Cela est très important et permettra à vos élèves de résoudre toutes les divisions et toutes les multiplications possibles quels que soient les types de nombres utilisés.

Solution





Demandez aux élèves de mesurer la largeur du trottoir (3 cm) ; puis sa longueur (13 cm).

Notez : 39 ÷ 3 = 13 et 39 ÷ 13 = 3.

Utilisez le même scénario pour présenter les problèmes suivants. (N'oubliez pas de tracer les deux schémas et de noter chaque solution au moyen des deux divisions appropriées.)

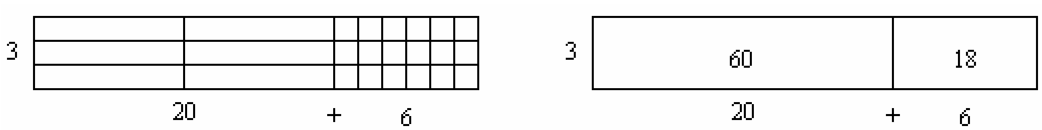
- 84 ÷ 4
- 60 ÷ 3
- 28 ÷ 2
- 55 ÷ 5

<u>Problème 20</u>

Comme au problème 19, mais cette fois, il faudra transformer des dizaines en unités. Pour cette raison, nous allons devoir représenter symboliquement les diverses étapes du travail concret. Sinon, nous risquons de ne plus nous rappeler les détails de la démarche.

Demandez aux élèves de représenter le nombre 78 avec leur matériel. Ensuite, demandez-leur de construire un trottoir de 3 unités de largeur. Rappelez-leur de placer d'abord tous les bâtonnets possibles.

Note : Laissez les élèves fabriquer leur « trottoir ». Au besoin rappelez-leur qu'il faut qu'ils obtiennent un rectangle et qu'aucun trou ne doit paraître.



Tracez les schémas qui précèdent en vous assurant que les élèves voient bien qu'ils représentent tous deux ce qu'ils ont construit. Ensuite, écrivez l'algorithme de division qui suit en le commentant tel que décrit.

$$\begin{array}{r|l} 78 & \underline{\;3\;} \\ \underline{-\,60} & \text{D} \\ & 2 \end{array}$$

Nous avions 78 à diviser par 3. En premier nous avons placé 6 dizaines ou 60 unités, ce qui a permis de couvrir une longueur de 2 dizaines ou de 20 unités.

$$\begin{array}{r|l} 78 & \underline{\;3\;\;\;} \\ \underline{-\,60} & \text{D U} \\ 18 & 2\;\;6 \\ \underline{-\,18} & \\ 0 & \end{array}$$

Ensuite, il restait 18 unités à placer. Avec ces 18 unités, après avoir changé 1 dizaine en 10 unités, nous avons prolongé le trottoir en plaçant 18 unités. Cela a permis d'allonger le trottoir de 6 autres unités. Le trottoir mesure maintenant 3 unités de largeur et 26 unités de longueur, donc : 78 ÷ 3 = 26 ou 78 ÷ 26 = 3. Mais aussi 3 x 26 = 78.

Procédez de la même façon avec :

- 95 ÷ 5
- 64 ÷ 4
- 56 ÷ 2
- 112 ÷ 4

Note : Pour 112 ÷ 4, les élèves n'ayant que leurs bâtonnets et leurs centicubes devront prendre 11 bâtonnets pour débuter.

Septième activité

Construire des dallages rectangulaires dont l'aire et la largeur sont connues.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la division au rectangle.**
2. **Trouver la longueur d'un rectangle connaissant son aire et sa largeur.**
3. **Associer le symbolisme de la division aux éléments correspondants du rectangle.**
4. **Associer l'algorithme de division aux éléments correspondants du rectangle.**
5. **Diviser les nombres naturels par un nombre à un chiffre.**

Matériel pour la classe :

- Trois mètres de bois.

Matériel pour chaque équipe de 4 élèves

- 50 centicubes ;
- 25 bâtonnets à café coupés pour qu'ils mesurent 10 cm de longueur.
- Une boîte de réglettes**.**

Problème 21

Cette fois, nous allons généraliser la division par un nombre à un chiffre sans reste.

Demandez aux élèves de représenter le nombre 345 avec leur matériel. Si les élèves ont moins que 34 bâtonnets, tant mieux ! Dans le cas contraire, ce n'est pas grave.

Montrez-leur vos 3 mètres et invitez une équipe à les utiliser pour résoudre le même problème.

Demandez-leur de faire un trottoir large de 3 unités avec ce matériel.

Note : Fabriquer un trottoir de 1 mètre 15 de long commence à être compliqué, à moins que les élèves placent deux pupitres côte à côte ou travaillent par terre. Profitez-en pour leur demander d'estimer la longueur du plus long trottoir qu'ils pourraient faire en classe (le trottoir doit être rectiligne).

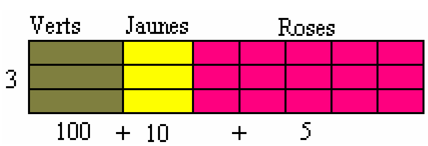
Vérifier ensuite leur estimation en mesurant la largeur, la longueur et la diagonale de votre classe. Selon les dimensions de votre classe, concluez qu'il sera difficile de fabriquer les prochains trottoirs qui doivent mesurer plus de 900 et même 1500 unités. Laissez-les discuter de ce qui pourrait être fait. Plus ils cherchent, plus ils comprendront que la solution est une bonne idée. S'ils ne trouvent pas après une dizaine de minutes, montrez un bâtonnet de 5 centimètres de long environ.

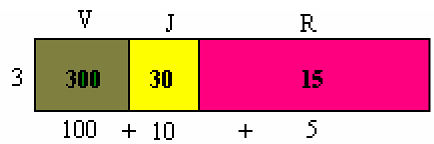
Demandez-leur ce qui se passerait si vous faisiez comme si ces demi-bâtonnets représentaient des dizaines et si les bâtonnets réguliers représentaient des centaines. Certains élèves mentionneront probablement que les demi-bâtonnets seront moins longs que 10 cubes alignés ou qu’il faut 10 dizaines pour faire 1 centaine et non seulement 2 dizaines (2 demi-bâtonnets pour un bâtonnet complet).

Montrez-leur alors des pièces de monnaie ou des billets de banque pour qu’ils constatent que les dimensions des pièces ou des billets ne sont pas proportionnelles à leur valeur. Cela étant admis, remettez les boîtes de réglettes à raison d’une boîte par équipe de 4 élèves. Convenez avec eux que les réglettes roses seront les unités, que les réglettes jaunes seront les dizaines et que les réglettes vert foncé seront les centaines.

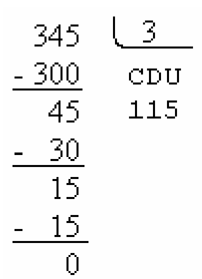
Un élève construira le trottoir, un autre lui fournira les unités, un autre fournira les dizaines et le quatrième fournira les centaines. Lorsque ce sera nécessaire, les élèves s’échangeront entre eux, par exemple une centaine (réglette vert foncé) pour dix dizaines (10 réglettes jaunes).

Revenez donc au problème du début : 345 ÷ 3 en demandant aux élèves d’utiliser leurs réglettes.





Après avoir dessiné les solutions au tableau grâce aux deux schémas ci haut, effectuez la division en montrant que chaque nombre posé correspond à quelque chose dans les deux schémas.



Notez aussi : 345 ÷3 = 115, 345 ÷ 115 = 3, 3 x 115 = 345 et 115 x 3 = 345.

<u>Problème 22</u>

Procédez comme au problème 21 pour les divisions suivantes.

a) 656 ÷ 4
b) 835 ÷ 5
c) 738 ÷ 6
d) 2165 ÷ 5

<u>Note</u> : Ici, les réglettes noires seront nécessaires. Mais comme les boîtes de réglettes comptent habituellement moins que 10 réglettes vert foncé, il faudra résoudre ce problème d’abord.

Laissez les élèves proposer des solutions, si personne ne pense à changer les codes de sorte que les réglettes rouges ou blanches représentent les unités, proposez cette idée et demandez aux élèves de la discuter.

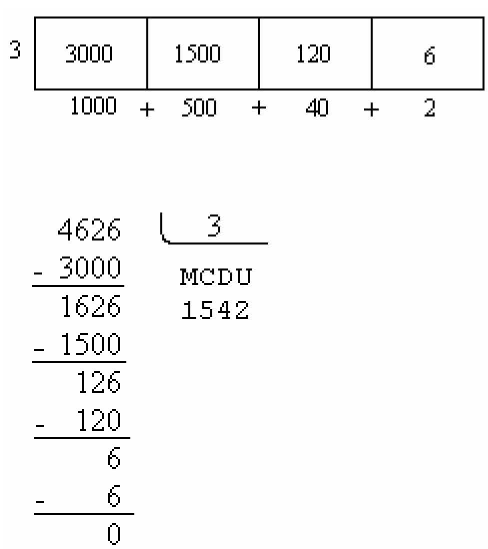
Suite à cette discussion, convenez ce qui suit : rouge = unité; vert clair = dizaine; rose = centaine; jaune = unité de mille. Affichez ce nouveau code à la vue de tous les élèves.

<u>Problème 23</u>

Proposez d'utiliser le nouveau code construit à la fin du problème précédent et demandez d'effectuer les divisions qui suivent. Invitez maintenant les élèves à venir noter au tableau leur travail en utilisant le schéma chiffré, l'algorithme de division et les 4 égalités appropriées.

a) 4626 ÷3

Solution



4626 ÷3 = 1542 ; 4626 ÷ 1542 = 3 ;
3 x 1542 = 4626 ; 1542 x 3 = 4626.

b) 6060 ÷ 5
c) 9748 ÷ 8
d) 1000 ÷ 4
e) 7863 ÷ 6

<u>Note</u> : En (e), il y a un reste, mais nous allons l'éviter. Comment diviser ces 3 unités en 6 ? Laissez les élèves en discuter. Au besoin, rappelez-leur qu'ils ont des réglettes blanches. Combien de blanches pour une rouge ? Certes, on peut décider que 1 rouge = 2 blanches, mais il vaut mieux conserver le modèle respecté à date grâce auquel le rapport entre une réglette et celle qui est immédiatement plus longue est de 10 pour 1. Donc, les 3 réglettes rouges seront transformées en 30 blanches. Illustrez la solution comme suit.

6	6000	1800	60	0	3,0
	1000 +	300 +	10 +	0 +	0,5

7863 | 6
- 6000   MCDU d
1863   1310,5
- 1800
63
- 60
3,0
- 3,0
0

Mentionnez que la virgule sert à indiquer où sont les unités en les séparant des dixièmes. – Si le terme « dixième » est nouveau pour vos élèves mentionnez qu'il signifie 10 fois plus petit que l'unité.

Problème 24

Demandez aux élèves d'effectuer les divisions suivantes en vous assurant qu'ils savent comment les traduire par l'algorithme de division.

a) 345 ÷ 2
b) 426 ÷ 4
c) 100 ÷ 8
d) 45 ÷ 4

Note : Pour 45 ÷ 4, il sera nécessaire de revenir au code original où les unités sont représentées par les réglettes vert clair. Cette fois les réglettes blanches représenteront donc les centièmes.

e) 90 ÷ 8
f) 23 ÷ 4

Continuez au besoin.

Problème 25

Vos élèves devraient maintenant être capables d'interpréter l'algorithme de division. Vous allez donc écrire de tels algorithmes au tableau en demandant aux élèves d'illustrer, avec leur matériel, ce que vous écrivez. Chaque fois que vous écrivez un chiffre ou un nombre, vos élèves doivent l'illustrer avant que vous continuiez à écrire. Convenez que les réglettes rouges représentent les unités.

Écrivez 532.

Assurez-vous que les élèves ont pris 5 réglettes roses, 3 réglettes vert clair et 2 réglettes rouges.

Écrivez maintenant :

```
532 |_4_
```

et demandez aux élèves ce qu'il faudra faire. (**Solution** : un corridor de 4 unités de largeur .)

Demandez –leur de ne pas vous devancer avec leur matériel puis notez :

```
  532 |_4_
- 400
```

Assurez-vous que les élèves placent 4 réglettes roses avant de noter :

```
  532 |_4_
- 400   c
  132   1
- 120
```

Cette fois les élèves auront transformé une centaine en dix dizaines et placé 12 réglettes vert clair (dizaines). Terminez de la même façon après avoir noté progressivement l'algorithme.

Procédez de la même façon en proposant les divisions suivantes.

a) 615 ÷ 5
b) 45,2 ÷ 4
c) 62 ÷ 5
d) 50 ÷ 4

Continuez au besoin.

Problème 26

Vos élèves devraient être capables de noter leurs divisions. Proposez-leur donc d'effectuer quelques divisions en notant l'algorithme de division chaque fois. Les élèves auront le choix entre commencer par la construction du rectangle et écrire ensuite l'algorithme ou commencer par écrire l'algorithme et ensuite construire le rectangle. Voici quelques suggestions.

a) 804 ÷ 4
b) 804 ÷ 6
c) 804 ÷ 8
d) 804 ÷ 5
e) 804 ÷ 2

Problème 27

Vous pouvez maintenant proposer des divisions à résoudre d’abord avec l’algorithme symbolique. Mentionnez aux élèves qu’ils ont la possibilité de vérifier leurs calculs par la suite avec le matériel.
Évitez de montrer que le calcul symbolique témoigne d’une capacité supérieure chez l’élève. Si vous n’agissez pas ainsi, les élèves comprendront rapidement qu’ils doivent laisser tomber leur matériel. Ce serait dommage et, pour certains élèves, cela rendrait tous les calculs qu’il leur reste à apprendre incompréhensibles et ardus.
Rappelez-vous que le sens original du mot calculer est: « Trouver des nombres avec des cailloux. »

Huitième activité

Construire des dallages rectangulaires dont la longueur et la largeur sont connues.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la multiplication au rectangle.**
2. **Associer les facteurs d'un nombre aux côtés du rectangle.**
3. **Trouver l'aire d'un rectangle dont les côtés sont connus.**
4. **Associer le symbolisme de la multiplication aux éléments correspondants du rectangle.**
5. **Associer l'algorithme de multiplication aux éléments correspondants du rectangle.**
6. **Multiplier les nombres naturels par un nombre à un chiffre.**

Matériel

Une boîte de réglettes par élève ou par équipe de deux élèves.

Problème 28

Les élèves ont habituellement plus de facilité à comprendre les consignes leur demandant de construire un rectangle dont ils connaissent l'aire et la largeur que de construire un rectangle où ils doivent trouver l'aire connaissant la largeur et la longueur de ce rectangle. C'est pour cette raison que nous avons commencé par la division.

Malgré cette préparation, comme certains de vos élèves ont peut-être déjà quelques notions au sujet de la multiplication et pour éviter que ce qu'ils savent de la technique de multiplication leur nuise, nous allons d'abord construire une image mentale solide en les dépaysant un peu. N'hésitez pas à lancer vos élèves dans l'activité qui suit car elle est beaucoup plus facile à réussir qu'une multiplication telle 123 x 3.

Demandez à vos élèves de choisir trois sortes de réglettes en s'assurant d'abord qu'ils disposent d'au moins 12 réglettes de chacune des couleurs choisies. Dites-leur de convenir d'un code qui servira à désigner leurs réglettes. Dans ce but, ils devront nommer leurs réglettes au moyen d'une des trois lettres suivantes : a, b et c. Chaque couleur sera désignée par une de ces trois lettres.

Demandez-leur maintenant de prendre 3 réglettes «a», 2 réglettes «b» et 1 réglette «c». Au tableau écrivez : 3a + 2b + 1c.

Demandez-leur de placer ces six réglettes bout à bout afin de former un rectangle large comme une réglette. Par la suite, complétez ce que vous avez déjà écrit comme suit : 3 (3a + 2b + 1c). Commentez ce que vous venez d'écrire comme suit : il faut faire un rectangle 3 fois plus large en utilisant d'autres réglettes a, b et c, mais en vous assurant que chaque bande de votre trottoir est identique à ce que vous avez déjà construit.

Note : Il est probable que certains élèves n'ordonnent pas leurs réglettes en regroupant les réglettes de même couleur dans chaque rangée et en plaçant vis-à-vis, d'une rangée à une autre, des réglettes de même couleur. Dans ce cas, ils arriveront aux mêmes résultats, mais ce sera plus difficile pour ces élèves de dénombrer le nombre de réglettes identiques et de vérifier leurs résultats. Discutez donc avec toute la classe des avantages qu'il y a à ordonner les réglettes et convenez de travailler de la sorte à l'avenir.

Tracez le schéma suivant au tableau en vous assurant que vos élèves comprennent bien qu'il représente leur travail avec les réglettes.

3	9a	6b	3c
	3a +	2b +	1c

Complétez alors l'équation en montrant qu'elle résume le travail fait :

$$3 (3a + 2b + 1c) = 9a + 6b + 3c.$$

Dites à vos élèves que vous allez supposer que les a représentent des centaines, les b des dizaines et les c des unités. Modifiez le tableau précédent en conséquence pour obtenir :

3	900	60	3
	300 +	20 +	1

Que représente alors $3a + 2b + 1c$? (**Sol. :** 321**).**

Et que représente : $3 (3a + 2b +1c) = 9a + 6b + 3c$ **(Sol. :** 3 X 321 = 963 **).**

Demandez-leur maintenant ce que cette expression représente si les a sont des unités, les b, les dizaines et les c, les centaines ?

Procédez comme pour le cas précédent. **(Sol. :** 3 X 123 = 369 **) .**

Faites-leur remarquer que tous obtiennent les mêmes résultats même s'ils n'ont pas pris les mêmes réglettes et adopté le même code. Discutez-en avec eux pour qu'ils comprennent pourquoi.

<u>Problème 29</u>

Procédez comme au problème précédent pour :

a) $4 (2a + 1b + 3c)$
b) $2 (5a + 3b + 1c)$
c) $3 (2a + 1b + 2c)$
d) $0 (4a + 5b + 6c)$
e) $1 (7a + 11b + 6c)$

Note : Le cas (e) est très intéressant car, en changeant ces lettres pour des unités, dizaines et centaines, la réponse que l'on obtiendra ne contiendra plus les 7, 11 et 6 observés en algèbre. La réponse sera 816 ou 717 ou 771 (a = centaines, c = dizaines et b = unités) ou…

Le calcul algébrique est plus simple car, ne sachant pas les valeurs relatives des lettres, nous ne pouvons les transformer. Il y a donc une étape de moins à réaliser.

Demandez donc à vos élèves de comparer les cas e et c et de vous expliquer pourquoi les choses sont différentes dans ces deux cas.

Problème 30

Afin de bien visualiser ce que représentent la division et la multiplication, demandez à vos élèves de trouver les nombres qui manquent dans les schémas suivants.

a)

4			

2a + 3b + 5c

b)

6			

3a + 7b + 5c

c)

6			

200 + 40 + 9

d)

8			

100 + 60 + 5

e)

5			

30 + 4 + 0,3

f)

7			

100 + 3 + 0,1

g)

7	28a	49b	42c

h)

10	30a	10b	80c

i)

9	1800	90	36

j)

8	4000	160	32

k)

	800	40	28

200 + 10 + 7

l)

	24a	36b	18c

4a + 6b + 3c

N'hésitez pas à donner d'autres exercices semblables à vos élèves. Alternez les problèmes utilisant les nombres algébriques et les nombres entiers. Si vous étudiez aussi les nombres décimaux, insérer des exercices où figurent ces nombres. En fait, ces variations permettent à l'élève de comprendre que, quels que soient les nombres, le processus est toujours le même.

Solutions :

a) 8a 12b 20c	b) 18a 42b 30c	c) 1200 240 54
d) 800 480 40	e) 150 20 1,5	f) 700 + 21 + 0,7
g) 4a + 7b + 6c	h) 3a + 1b + 8c	i) 200 + 10 + 4
j) 500 + 20 + 4	k) 4	l) 6

<u>Problème 31</u>

Au tableau, écrivez :

$$\begin{array}{r} 3x \; + \; 4y \; + \; 6z \\ \times \qquad\qquad 4 \\ \hline 12x + 16y + 24z \end{array}$$

Demandez à vos élèves de vous expliquer ce que vous venez de faire.

Gardez ce qui précède au tableau et écrivez :

$$\begin{array}{r} 300 \; + \; 40 \; + \; 6 \\ \times \qquad\qquad 4 \\ \hline 1200 + 160 + 24 = 1384 \end{array}$$

Demandez à vos élèves de comparer ces deux multiplications. Conservez-les et écrivez maintenant :

$$\begin{array}{r} 3 \;\; 4 \;\; 6 \\ \times \qquad 4 \\ \hline 13 \;\; 8 \;\; 4 \end{array}$$

Demandez à vos élèves de comparer les deux dernières multiplications.

Proposez-leur de faire le même travail avec les multiplications :

a) (4x + 2y + 3z) X 3 et 423 X 3
b) (3x + 1y + 5z) X 2 et 315 X 2
c) (5x + 4y + 5z) X 4 et 545 X 4
d) (3x + 7y + 5z) X 8 et 375 X 8

Neuvième activité

La racine carrée.

Construire des dallages de forme carrée à partir de trinômes.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer certains trinômes à des dallages de forme carrée.**
2. **Trouver la racine carrée d'un trinôme.**

Matériel

Matériel de base dix ou tuiles algébriques.

Note : Passons maintenant aux opérations où les nombres ont deux chiffres et plus chacun. Dans un premier temps, le travail visera à généraliser les images mentales déjà utilisées. Pour tous les élèves, qu'ils soient actuellement à l'aise ou en difficulté, il y a lieu de travailler avec le matériel sans référer aux algorithmes connus. Afin de s'assurer que les élèves ne le font pas, c'est exclusivement au moyen de nombres algébriques que le travail sera décrit. Cette stratégie comporte de nombreux avantages :

- le calcul algébrique est plus facile que le calcul numérique, ainsi, pour un débutant, il est plus facile de diviser $2x^2 + 11xy + 14y^2$ par $2x + 7y$ que 324 par 27 ;
- il est important de dépayser les élèves afin qu'ils ne court-circuitent pas la démarche de compréhension et de raisonnement par un truc déjà appris ;
- pour les élèves qui sont habituellement en difficulté, tenter de résoudre des problèmes qui s'adressent à des élèves plus avancés n'est pas aussi agressant comme l'est la situation où ils se mesurent difficilement à des problèmes que d'autres élèves de leur âge réussissent facilement.

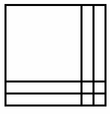
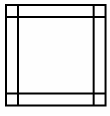
Problème 32

Remettez aux élèves le matériel dit de base dix. Avisez-les au départ qu'il s'agit de tuiles de dimensions diverses et non de centaines, de dizaines et d'unités.

Demandez-leur de prendre un grand carré, quatre rectangles et 4 petits carrés.

Demandez-leur de placer ce matériel afin de recouvrir un carré. Il ne faudra pas qu'il reste d'espaces libres dans le carré et il ne faudra pas qu'il y ait superposition de matériel.

Solutions

Il existe d'autres possibilités.

Tracez les solutions au tableau et mentionnez aux élèves que vous allez en faire ressortir les caractéristiques communes. Laissez-les identifier ces caractéristiques. Orientez-les au besoin.

Les caractéristiques sont :
- ce sont tous des carrés ;
- ils ont tous la même aire ;
- ils ont tous la même largeur et la même longueur ;

Dites-leur que vous allez utiliser les codes mathématiques qui mentionnent ces caractéristiques de façon très concise :

- les grands côtés seront des x ;
- les petits côtés seront des y ;
- les carrés de côtés x seront appelés x^2 (x carré) ;
- les carrés de côtés y seront appelés y^2 (y carré) ;
- les rectangles dont les côtés sont x et y seront appelés xy .

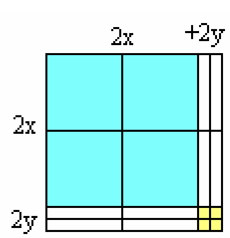
Le matériel du début, qui représente l'aire du carré, est donc : $1x^2 + 4xy + 4y^2$. Les côtés des carrés construits mesurent 1x + 2y de longueur.

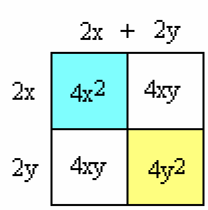
$\sqrt{1x^2 + 4xy + 4y^2} = 1x + 2y$, c'est-à-dire que si l'aire d'un carré est $1x^2 + 4xy + 4y^2$ alors, la longueur du côté de ce carré est 1x + 2y.

<u>Problème 33</u>

Au tableau écrivez $\sqrt{4x^2 + 8xy + 4y^2}$. Assurez-vous que les élèves comprennent ce que cette expression signifie avant de leur demander de construire les carrés.

Parmi toutes les solutions possibles, après avoir montré qu'elles étaient toutes équivalentes, c'est-à-dire que les côtés de chaque carré formé mesurent chaque fois 2x + 2y, tracez au tableau les deux représentations suivantes.





Montrez aux élèves que la figure de droite représente la même chose que celle de gauche. Invitez vos élèves à disposer désormais leur matériel de la même façon, c'est-à-dire en plaçant les grands carrés en haut à gauche, les petits carrés en bas à droite et les rectangles en haut à droite et en bas à gauche.

Problème 34

Proposez maintenant les problèmes suivants.

a) $\sqrt{1x^2 + 12xy + 9y^2}$ b) $\sqrt{4x^2 + 2xy + 9y^2}$

c) $\sqrt{1x^2 + 8xy + 16y^2}$ d) $\sqrt{9x^2 + 18xy + 9y^2}$

Dessinez chaque solution comme au problème 33 en montrant aux élèves que les deux carrés représentent chaque fois la même solution.

Solutions

a) 1x + 3y b) 2x + 3y c) 1x + 4y d) 3x + 3y

Problème 35

Cette fois, demandez aux élèves de trouver les nombres qui manquent dans les diagrammes suivants.

a)

$4x^2$	10xy
10xy	$25y^2$

b)

$16x^2$	8xy
8xy	$4y^2$

c)

$25x^2$	30xy
	$36y^2$

d)

$100x^2$	
70xy	$49y^2$

e)

$1x^2$	
	$25y^2$

f)

$64x^2$	
	$9y^2$

g)

$25x^2$	
	$25y^2$

h)

$81x^2$	
	$0y^2$

Solutions

a) 2x + 5y b) 4x + 2y

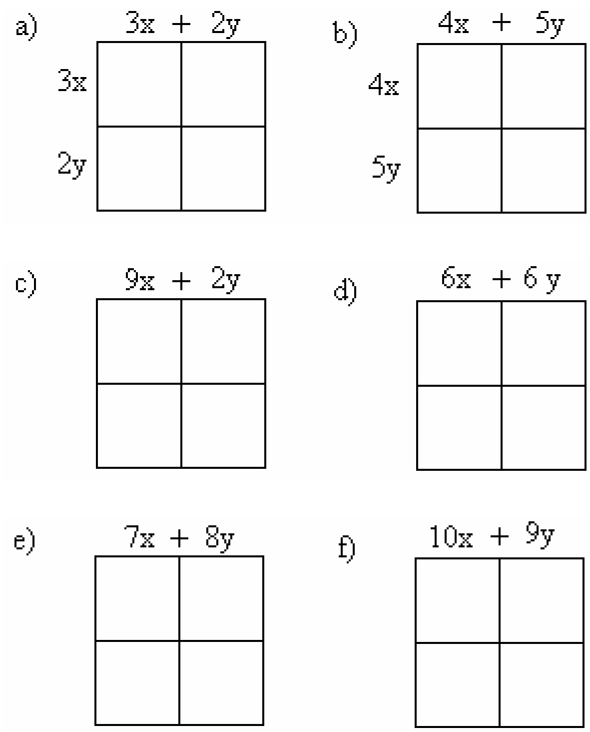
c) 5x + 6y et 30xy d) 10x + 7y et 70xy

e) 1x + 5y et 5xy f) 8x + 3y et 24xy
g) 5x + 5y et 25xy h) 9x + 0y et 0xy

Problème 36

Cette fois, les côtés des carrés sont donnés et il faut trouver les nombres qui vont à l'intérieur du diagramme.

Cette activité est très importante car elle prépare la multiplication. Voici donc les problèmes à soumettre.



Solutions

a) $9x^2$, 6xy, 6xy, $4y^2$
b) $16x^2$, 20xy, 20xy, $25y^2$
c) $81x^2$, 18xy, 18xy, $4y^2$
d) $36x^2$, 36xy, 36xy, $36y^2$
e) $49x^2$, 56xy, 56xy, $64y^2$
f) $100x^2$, 90xy, 90xy, $81y^2$

Dixième activité

La division.

Construire des dallages rectangulaires dont un trinôme représente l'aire et un binôme représente la largeur.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la division d'un trinôme par un binôme au rectangle.**
2. **Trouver le binôme représentant la longueur d'un rectangle connaissant son aire et sa largeur.**
3. **Associer le symbolisme de la division aux éléments correspondants du rectangle.**

Matériel

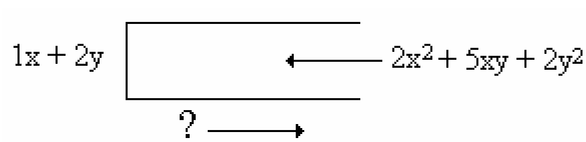
Matériel de base dix ou tuiles algébriques.

Problème 37

Demandez aux élèves de prendre $2x^2 + 5xy + 2y^2$. Cette fois, le plancher n'est pas un carré, mais un rectangle dont la largeur est $1x + 2y$. Il faut trouver sa longueur.

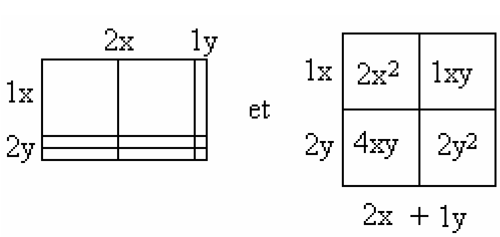
Notez au tableau $(2x^2 + 5xy + 2y^2) \div (1x + 2y)$.

Note : Pour les élèves qui ne comprennent pas la consigne, tracez un rectangle ouvert comme le suivant :



Mentionnez qu'il faut trouver quelle longueur il est possible de couvrir avec le matériel. Pour certains élèves, il faudra peut-être tracer un rectangle ouvert de 12 cm de hauteur et les inviter à y insérer leur matériel en commençant par la gauche.

Solution



Problème 38

Comme pour le problème 37, proposez de construire les rectangles dont voici l'aire et la hauteur.

a) $(2x^2 + 7xy + 3y^2) \div (2x + 1y)$
b) $(4x^2 + 10xy + 6y^2) \div (2x + 2y)$
c) $(3x^2 + 4xy + 1y^2) \div (1x + 1y)$
d) $6x^2 + 11xy + 3y^2) \div (3x + 1y)$
e) $(4x^2 + 15xy + 9y^2) \div (4x + 3y)$
f) $(6x^2 + 3xy) \div (3x)$
g) $(6x^2 + 2xy) \div (3x + 1y)$

Solutions

a) $x + 3y$ b) $2x + 3y$ c) $3x + 1y$ d) $2x + 3y$
b) $1x + 3y$ f) $2x + 1y$ g) $2x$

Problème 39

Demandez maintenant aux élèves de trouver la longueur du côté de chacun des rectangles suivants.

a) $2x + 3y$

$6x^2$	$9xy$
$8xy$	$12y^2$

b) $5x + 1y$

$20x^2$	$4xy$
$40xy$	$8y^2$

c)

$2x$	$6x^2$	$8xy$
$+5y$	$15xy$	$20y^2$

d)

$5x$	$20x^2$	$45xy$
$+7y$	$28xy$	$63y^2$

e) $6x + 9y$

$12x^2$	$18xy$
$6xy$	$9y^2$

f) $8x + 6y$

$24x^2$	$18xy$
$40xy$	$30y^2$

g)

$3x$	$27x^2$	$21xy$
$+4y$	$36xy$	$28y^2$

h)

$8x$	$40x^2$	$24xy$
$+10y$	$50xy$	$30y^2$

Solutions

a) $3x + 4y$

b) $4x + 8y$

c) $3x + 4y$

d) $4x + 9y$

e) $2x + 1y$

f) $3x + 5y$

g) $9x + 7y$

h) $5x + 3y$

<u>Onzième activité</u>

La multiplication

Construire des dallages rectangulaires dont la longueur et la largeur sont données sous la forme de binômes.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la multiplication au rectangle.**
2. **Trouver le trinôme qui représente l'aire d'un rectangle dont les côtés sont donnés sous la forme de binômes.**
3. **Associer le symbolisme de la multiplication aux éléments correspondants du rectangle.**

Matériel

- 2 règles graduées en centimètres ;
- matériel de base dix.

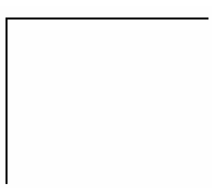
<u>Problème 40</u>

Patientez encore un peu, c'est trop tôt pour laisser l'algèbre de côté. Et puis, ça ne va pas si mal, non ?

<u>Notes</u> :

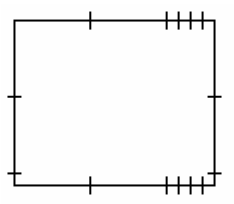
1. Si votre matériel est assez précis, les côtés des grands carrés mesurent 1 dm ou 10 cm et ceux des petits carrés mesurent 1 cm. Une différence d'un ou de deux millimètres est négligeable.
2. Pour les problèmes qui suivent certains élèves auront besoin des règles comme guides alors que d'autres ne les utiliseront que pour les premiers problèmes. Assurez-vous que les élèves qui ont besoin des règles puissent en disposer aussi longtemps que nécessaire.
3. Pour certains élèves, il faudra aller encore plus loin, c'est-à-dire tracer d'abord le rectangle avant d'en daller la surface. Faites-le, cela est essentiel à la construction de l'image mentale guide.

Au tableau, tracez deux perpendiculaires comme suit :



Dites aux élèves qu'il s'agit des côtés du rectangle suivant :

Graduez maintenant à l'œil les côtés de ce rectangle comme suit :

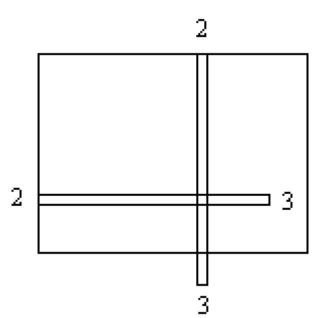


Commentez ces graduations en faisant remarquer que la largeur du rectangle mesure 2x + 4y et que sa hauteur mesure 2x + 1y.

Sur une feuille de papier blanc de format lettre, demandez aux élèves de tracer un rectangle semblable en considérant que 1x = 1dm ou 10 cm et 1y = 1cm.

ASTUCE

1. Utilisez deux des côtés de la feuille en guise de côtés du rectangle.
2. Marquez la fin de chaque côté.
3. Placez les deux règles sur la feuille afin de trouver les deux côtés manquants.
4. Tracez ces deux côtés.

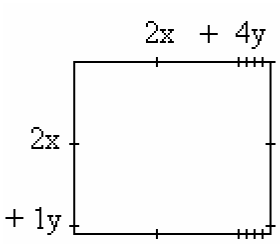


Notes :
1. Ce qui précède n'est pas nécessairement facile et, selon l'âge de l'élève, la difficulté peut être importante. Si tel est le cas, vous pouvez utiliser du papier quadrillé en centimètres carrés au lieu d'une feuille blanche.
2. Il y a lieu de s'assurer que les élèves réussissent bien à tracer le rectangle demandé avant d'aller plus loin.
3. Assurez-vous qu'ils ont compris en demandant de tracer d'autres rectangles. Exemples :
   a) 2x + 5y par 1x + 3y
   b) 1x + 16y par 2x + 0y

c) $2x + 3y$ par $1x + 7y$

Problème 41

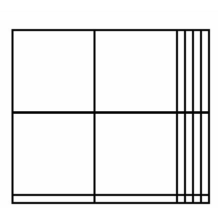
Reprenez le premier rectangle du problème 40 et tracez au tableau :



Demandez aux élèves de recouvrir ce rectangle avec leur matériel en utilisant le moins de pièces possibles, c'est-à-dire exactement 18 pièces.

- Combien de pièces de chaque sorte faudra-t-il ?

Solution



$4x^2 + 10xy + 4y^2$

Tracez la grille solution ci-haut et la grille résumé qui suit :

	$2x$	$+ 4y$
$2x$	$4x^2$	$8xy$
$+ 1y$	$2xy$	$4y^2$

Problème 42

Voici d'autres problèmes semblables au problème 41. Ce qui importe vraiment ici est que les élèves comprennent que les nombres que vous leur donnez représentent les côtés des rectangles alors que ce qui est cherché est l'aire de ce rectangle.

a) $(3x + 2y) \times (1x + 5y)$
b) $(4x + 3y) \times (5x + 4y)$
c) $(6x + 2y) \times (7x + 3y)$
d) $(2x + 9y) \times (6x + 3y)$

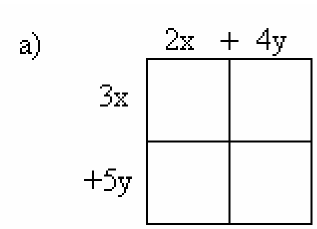
e) (8x + 1y) x (3x + 4y)

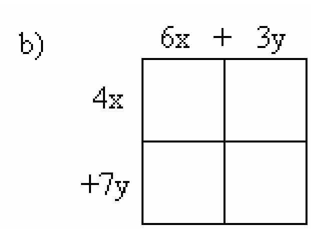
Solutions

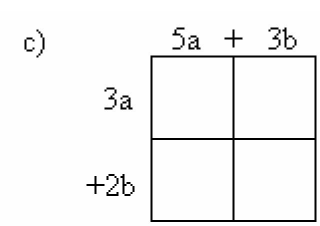
a) $3x^2 + 17xy + 10y^2$
b) $20x^2 + 31xy + 12y^2$
c) $42x^2 + 32xy + 6y^2$
d) $12x^2 + 60xy + 27y^2$
e) $24x^2 + 35xy + 4y^2$

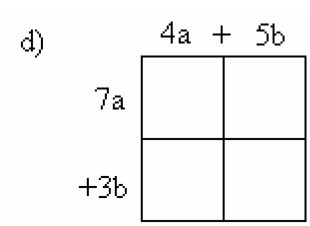
Problème 43

Cette fois, les élèves devront trouver les nombres manquants dans les grilles suivantes.

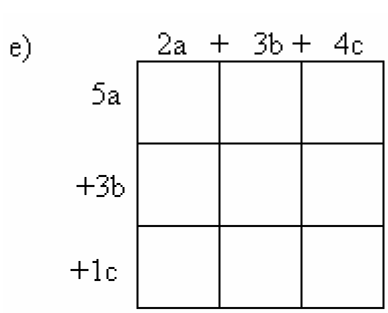


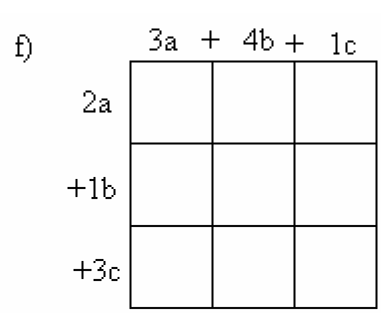






Note : a ou x, du pareil au même, il s’agit d’un nombre masqué !





Solutions

Gardez ces solutions au tableau et demandez à vos élèves d’observer un intéressant phénomène qui est plus évident encore avec les deux dernières solutions. Que remarquent-ils ?

e)

$10a^2$	$15ab$	$20ac$
$6ab$	$9b^2$	$12bc$
$2ac$	$3bc$	$4c^2$

f)

$6a^2$	$8ab$	$2ac$
$3ab$	$4b^2$	$1bc$
$9ac$	$12bc$	$3c^2$

Les diagonales ont souvent les mêmes lettres. Lorsque nous traduirons ces grilles en multiplications arithmétiques, il n'y aura plus d'exceptions. Ce constat permet des vérifications rapides.

Douzième activité

L'arithmétique.

Et maintenant, passons à l'arithmétique. En fait, l'arithmétique est un cas particulier de l'algèbre qui constitue elle-même une des possibilités de décrire l'environnement. Ainsi, un rectangle peut être simplement construit. Il est ensuite possible de le décrire de nombreuses façons : « Il est coloré jaune et bleu. », « Il est plus long que large. », etc. Une de ces façons est l'algèbre où un ensemble de rectangles peuvent être décrits par l'égalité $(2x + 1y) \times (2x + 3y) = 4x^2 + 8xy + 3y^2$. Ce même ensemble de rectangles peut aussi être décrit par $(4x^2 + 8xy + 3y^2) \div (2x + 1y) = 2x + 3y$.

L'arithmétique précise encore car elle s'attache à un ensemble de rectangles congrus dont les mesures sont les mêmes. Ainsi, on peut décider que x représente un mètre alors que y représente un centimètre. La description algébrique précédente deviendra alors $(2\text{ m} + 1\text{ cm}) \times (2\text{ m} + 3\text{ cm}) = 4\text{m}^2 + 8\text{ dm}^2 + 3\text{cm}^2$ ou $2{,}01\text{ m} \times 2{,}03\text{ m} = 4{,}0803\text{m}^2$.

Évidemment, x pourrait représenter des dizaines et y des unités. Nous aurions alors $(2\text{ d} + 1\text{ u}) \times (2\text{ d} + 3\text{ u}) = 4\text{d}^2 + 8\text{ d u} + 3\text{ u}^2$ mais d x d = c, d x u = d et u x u = u. D'où $(2\text{ d} + 1\text{ u}) \times (2\text{d} + 3\text{ u}) = 4\text{ c} + 8\text{ d} + 3\text{ u}$ ou encore $21 \times 23 = 483$. De la même façon, nous pourrions avoir (2 u + 1 dixième) x (2 u + 3 dixièmes) = 4 u + 8 dixièmes + 3 centièmes ou $2{,}1 \times 2{,}3 = 4{,}83$.

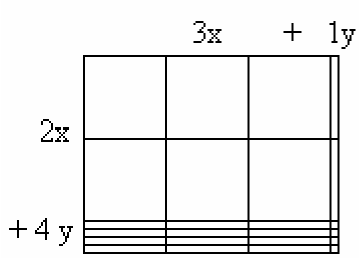
Dans les prochaines activités, nous allons donc tenter de faire comprendre aux élèves que les nombres prennent souvent des costumes fort différents pour décrire les mêmes objets. C'est un peu comme un crayon, il est possible d'en parler dans plusieurs langues. On ne dit pas alors le même mot, mais on parle toujours du même objet.

Un dernier mot. Vous constaterez sans doute, en réalisant les problèmes qui suivent, que, du plus facile au plus difficile, ce sur quoi nous travaillons se présente toujours comme suit :

1. Construire un rectangle avec un matériel donné en utilisant le langage courant tel que cela a été réalisé par exemple au problème 32 de ce chapitre.
2. Construire un rectangle à partir d'une représentation algébrique. (Voir problème 33.)
3. Construire un rectangle à partir d'une représentation chiffrée en nombre entier. (Ex. : Construire le carré représenté par 484. D'accord, c'est aussi facile que de construire le carré représenté par $4x^2 + 8xy + 4y^2$, mais c'est beaucoup moins évident lorsqu'il faut construire le carré qui contient 289 unités. En algèbre, ce carré se présenterait sous la forme $1x^2 + 14xy + 49y^2$ d'où il est facile d'extraire $1x + 7y$.)
4. Construire un rectangle à partir de nombres ayant des parties décimales. La racine carrée de 289 est 17, celle de 2,89 est 1,7. La place du point pose souvent un problème.

Problème 44

Au tableau, tracez :



	3x	+ 1y
2x		
+ 4y		

Demandez aux élèves de remplir les cases du deuxième rectangle.

Solution

	3x	+ 1y
2x	$6x^2$	2xy
+ 4y	12xy	$4y^2$

Dites-leur ensuite que les x représentent des dizaines et les y représentent des unités. Quelle est la largeur du rectangle ? (**Solution** : 31) Quelle est sa hauteur ? (**Solution** : 24)

Tracez :

	30	+ 1
20		
+ 4		

Demandez aux élèves de remplir les cases de ce nouveau rectangle.

Solution

	30	+ 1
20	600	20
+ 4	120	4

Comparez maintenant les deux rectangles obtenus précédemment.

	$3x$ +	$1y$
$2x$	$6x^2$	$2xy$
$+4y$	$12xy$	$4y^2$

	30 +	1
20	600	20
+ 4	120	4

Faites ressortir à quel point ces rectangles se ressemblent : les x sont devenus des dizaines et les x^2, ces centaines (10 x 10).

Demandez aux élèves de décrire chacun de ces deux rectangles sous la forme d'une multiplication. Notez les réponses comme suit :

$(3x + 1y) \times (2x + 4y) = 6x^2 + 2xy + 12xy + 4y^2 = 6x^2 + 14xy + 4y^2$

31 x 24 = 600 + 20 + 120 + 4 = 600 + 140 + 4 = 144

Montrez les ressemblances entre les deux multiplications.

Problème 45

Demandez aux élèves de multiplier les nombres suivants en utilisant chaque fois une grille comme au problème précédent.

a) 36 x 45
b) 27 x 59
c) 213 x 34
d) 89 x 78

Solutions

a)

	30 +	6
40	1200	240
+5	150	30

36 x 45 = 1620

b)

	20 +	7
50	1000	350
+9	180	63

27 x 59 = 1593

c)

	200 +	10 +	3
30	6000	300	90
+4	800	40	12

213 x 34 = 7242

d)

	80 +	9
70	5600	630
+8	640	72

89 X 78 = 6942

Faites remarquer que sur les mêmes diagonales il y a toujours un même nombre de zéros et que ce nombre de zéros augmente régulièrement d'une diagonale à sa voisine de gauche. On retrouve deux « exceptions ». Le 30 en (a) le 1000 en (b). Chaque fois, il s'agit d'une multiplication où 5 multiplie un nombre pair, ce qui conduit à un zéro aux unités. En (a), 5 x 6 = 30 (Avoir 5 x 7, aucun zéro n'apparaîtrait.) ; en (b), 5 x 2 = 10. Ces zéros ne seront pas soulignés dans les grilles afin de montrer que la progression est respectée.

Continuez au besoin. N'hésitez pas à proposer des multiplications avec des nombres plus grands tels 2148 x 124, ou 412 x 536. Il s'agira alors de consolider le modèle en permettant aux élèves de constater que cette technique est toujours valable.

Problème 46

Certaines multiplications telle 389 x 497 peuvent être modifiées de façon à rendre les calcul plus simples. Dans ce but, il faut que les élèves découvrent d'abord la loi des singes en multiplication. Ce n'est pas difficile et cela permet de donner un nouveau type d'exercices qui offre aux élèves l'occasion de pratiquer leurs tables. Au tableau, écrivez :

	5	-2
6		
-1		

Demandez aux élèves de faire les quatre multiplications en remplissant cette grille, mais sans s'occuper des signes.

	5	-2
6	30	12
-1	5	2

Demandez-leur maintenant de trouver ce que représentent 5 – 2 et 6 – 1 (**Solution** : 3 et 5) et ensuite d'effectuer 3 x 5 (**Solution** : 15 donc (5 - 2) x (6 – 1) = 15.

Mentionnez-leur que les nombres 30, 12, 5 et 2 de la grille permettent de trouver 15. Il suffit de trouver à quelle équipe, celle des + ou celle des -, chacun de ces nombres appartient. (**Solution** : +30 –12 –5 +2 = 15)

Ne parlez pas encore de la loi des signes, mais offrez-leur l'occasion de valider ce qu'ils viennent de trouver en leur proposant :

a)

	7	-4
6		
-1		

b)

	10	-1
10		
-2		

c)

	7	-7
4		
-1		

d)

	8	-5
9		
-2		

Solutions

a)

	7	-4
6	42	-24
-1	-7	+4

3 x 5 = 42 - 24 - 7 + 4 = 15

b)

	10	-1
10	100	-10
-2	-20	+2

9 x 8 = 100 - 10 - 20 + 1 = 72

c)

	7	-7
4	28	-28
-1	-7	+7

0 x 3 = 28 - 28 - 7 + 7 = 0

d)

	8	-5
9	72	-45
-2	-16	+10

3 x 7 = 72 - 45 - 16 + 10 = 21

Cette fois, demandez aux élèves de trouver ce qui se produit dans les cas suivants en observant les résultats obtenus aux problèmes précédents :

- + x + (**Solution** : Toujours + .)
- – x + (**Solution** : Toujours – .)
- + x – (**Solution** : Toujours – .)
- – x – (**Solution** : Toujours + .)

<u>Problème 47</u>

Tracez au tableau les deux grilles suivantes.

	30 +	9
40		
+8		

	40 -	1
50		
-2		

N'oubliez pas de souligner les zéros. Invitez les élèves à effectuer ces multiplications. Par la suite, demandez-leur si une des multiplications était plus facile que l'autre.

Solutions

	30 +	9
40	1200	360
+8	240	72

	40 -	1
50	2000	-50
-2	-80	+2

39 x 48 = 1200 + 360 + 240 + 72 = 1872 ou 39 x 48 = 2000 - 50 - 80 + 2 = 1872

> **<u>Note</u>** : Il s'agit dans les deux cas de 39 x 48, mais la seconde sera plus facile pour les élèves qui ne maîtrisent pas leur tables du 8 et du 9.

<u>Problème 48</u>

Tracez :

	300	80	9
400			
90			
8			

	400	-10	-1
500			
-2			

Demandez aux élèves d'effectuer ces deux multiplications afin de voir s'il y en a une qui est plus facile à faire que l'autre.

Solutions

	300	80	9
400	120 000	32 000	3600
90	27 000	7200	810
8	2400	640	72

389 x 498 = 120 000 + 32 000 + 27 000 + 3600 + 7200 + 2400 + 810 + 640 + 72 = 13 722

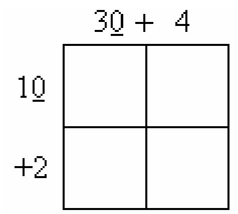
Note : Ce problème permet aux élèves de percevoir qu’il est souvent possible de simplifier les calculs et que rien ne l’interdit. Pour les élèves non convaincu, demandez-leur d’effectuer 99 x 99 sous la forme (90 + 9) x (90 + 9) et ensuite sous la forme (100 – 1) x (100 – 1).

Treizième activité

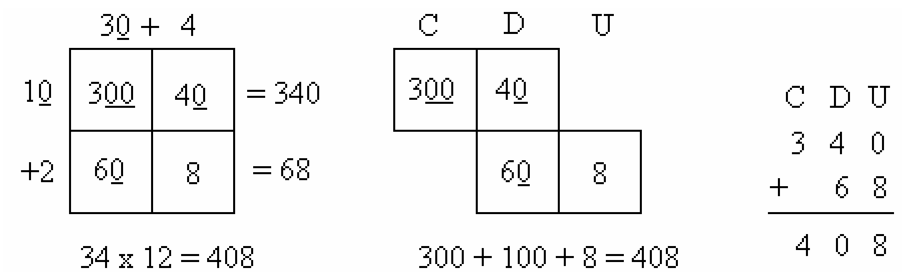
Liens entre la multiplication dans un rectangle et l'algorithme de multiplication.

Problème 49

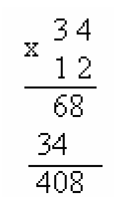
Demandez aux élèves d'effectuer :



Inscrivez les réponses dans le rectangle. Ensuite tracez à la droite de ce rectangle, ce qui suit.



Effectuez enfin :



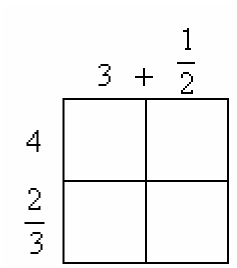
Demandez aux élèves de comparer toutes ces façons de multiplier. Assurez-vous que les élèves voient comment la valeur de position (C, D, U) remplace les 00 et 0 dans les deux dernières multiplications.

Si la dernière inverse le 68 et le 340 de la troisième illustration, c'est pour s'assurer qu'aucune position n'est oubliée. En décollant le 34 d'une position, on rappelle simplement qu'il s'agit de 34 dizaines.

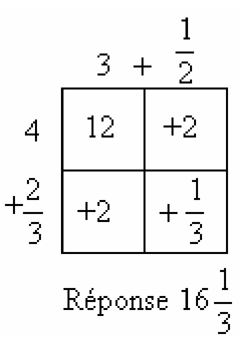
Note : Vos élèves devraient avoir le choix entre la multiplication dans un rectangle (première illustration) et la multiplication traditionnelle. La première est plus facile à comprendre, le risque d'erreurs est moins élevé et elle est la meilleure technique lorsqu'il s'agit de multiplier de long polynômes algébriques.

Problème 50

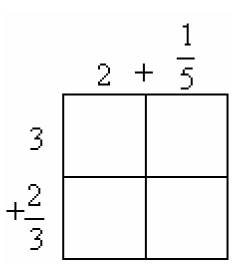
La multiplication dans un rectangle peut aussi servir à multiplier des fractions. Si vos élèves ont déjà multiplié des fractions (Sinon, voir le problème XX de ce chapitre.) vous pouvez leur proposer :

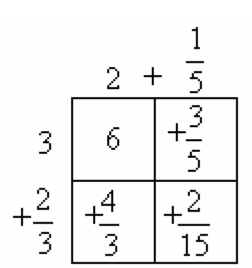


Solution



Un autre exemple :





Il reste à traduire en quinzième $\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$ et $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, puis à additionner : $6 + \frac{9}{15} + \frac{20}{15} + \frac{2}{15} = 6\frac{31}{15} = 8\frac{1}{15}$.

Quatorzième activité

La preuve par neuf.

La preuve par neuf est une technique simple qui permet de vérifier tous les calculs arithmétiques. On peut la démontrer de diverses façons, mais nous négligerons de le faire car il faudrait recourir à des calculs assez complexes.

Problème 51

Proposez aux élèves d'effectuer :

	100 +	40 +	8
200			
60			
7			

Solution

	100 +	40 +	8
200	20 000	8000	1600
60	6000	2400	480
7	700	280	56

148 x 267 = 39 516

Conservez la grille solution en mentionnant aux élèves que vous allez réduire tous ces nombres à des nombres à un seul chiffre. Procédez comme suit :

Écrivez :

1 4 8 →	1 + 4 + 8 = 13 →	1 + 3 = 4 (a)
x 2 6 7 →	2 + 6 + 7 = 15 →	1 + 5 = 6 (b)
39 516 →	3 + 9 + 5 + 1 + 6 = 24 →	2 + 4 = 6 (c)

Ensuite 4 x 6 = 24 (a x b) et 2 + 4 = 6 or (c) = 6.

Note : C'est plus rapide lorsqu'on constate que tout ce qui donne 9 est équivalent à 0 et n'a pas à être additionné. On obtient alors :

1 4 8	= 4
x 2 6 7	= 6
39 516	= 6 Puis 4 x 6 = 24 et 2 + 4 = 6

Problème 52

Écrivez ces multiplications au tableau, avec les réponses et demandez aux élèves de trouver les deux multiplications fausses en utilisant la preuve par 9.

a)		b)		c)	
	3 4		8 3		4 5
	x 5 2		x 7 4		x 6 4
	1768		6142		2880

d)		e)		f)	
	2 5		8 2		5 7
	x 9 5		x 2 4		x 3 3
	2275		6		1881

Solution : (d) et (e) sont évidemment fausses et ce, même si la preuve par 9 semble montrer que la réponse est bonne.

En fait, la preuve par neuf ne tient pas compte de la valeur de position. En (a) par exemple, elle peut laisser croire que 7168, 8761,… sont de bonnes réponses. Bref, la preuve par 9 est très utile surtout lorsque l'on connaît mal ses tables de multiplication et d'addition, mais elle n'est pas infaillible. Elle détecte pratiquement toutes les erreurs lorsque la valeur de position est bien respectée par l'élève.

Voici quelques exemples où la valeur de position n'est pas respectée et où la preuve par 9 ne détectera pas l'erreur. Proposez-les aux élèves afin qu'il comprennent bien ce qui se passe mais aussi afin qu'ils constatent le type d'erreurs à surveiller lorsqu'on utilise cette preuve.

a)		b)	
	3 4		3 4
	x 1 2		x 1 2
	6 8		3434
	3 4		
	102		

c)		d)	
	3 4		3 4
	x 1 2		x 1 2
	3 4		8 6
	6 8		3 4
	7 1 4		4 2 6

Note : Il est possible que vous ayez déjà appris la preuve par 9 qui utilise un grand X et où on situe les divers nombres dans les angles de ce X. Afin d'éviter des erreurs et des confusions, il est préférable d'utiliser la preuve par 9 en écrivant les nombres réduits à un seul chiffre à côté des nombres d'origine. Voici des exemples de preuve par 9 pour chacune des opérations arithmétiques.

a)
$$\begin{array}{r} 3\,4\,7 = 5 \\ \underline{+\,1\,2\,5} = \underline{8} \\ 4\,7\,2 = 4 \end{array} \quad \text{et} \quad 5 + 8 = 13 \longrightarrow 1 + 3 = 4$$

b)
$$\begin{array}{r} 4\,7\,2 = 4 \\ \underline{-\,1\,2\,5} = -\underline{8} \\ 3\,4\,7 = 5 \end{array} \quad ???$$

Rappelez-vous que la soustraction est l'inverse de l'addition, donc, au lieu d'effectuer 4 – 8 = 5, pensez cette soustraction telle une addition et vous revenez au cas (a) : 5 + 8 = 4. Une autre façon serait d'ajouter 9 à 4 puisqu'en preuve par 9, 9 = 0. Vous auriez alors (4 + 9) – 8 = 5.

c)
$$3136 \div 64 = 49$$
$$4 \div 1 = 4$$

Cette fois on peut diviser 4 par 1, mais on pourrait calculer à l'inverse 4 x 1 = 4.

d)
$$5700 \div 75 = 76$$
$$3 \div 3 = 4$$
Mais 4 x 3 = 12 et 1 + 2 = 3.

e)
$$\sqrt{625} = 25$$
$$\sqrt{4} = 7 \quad ???$$
Mais 7 x 7 = 49 et 4 + 9 = 4.

Bref, il est plus simple de considérer l'addition et la multiplication au moment d'effectuer la preuve par 9, même si le calcul original est une soustraction, une division ou l'extraction d'une racine.

Quinzième activité

La multiplication sur les nombres décimaux.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la multiplication au rectangle.**
2. **Trouver l'aire d'un rectangle dont les côtés sont donnés sous la forme de nombres décimaux.**
3. **Associer le symbolisme de la multiplication aux éléments correspondants du rectangle.**

Matériel

- matériel de base dix.

Problème 53

Demandez aux élèves d'effectuer la multiplication suivante en utilisant le rectangle :

	40	+ 8
30		
+7		

Solution :

	40	+ 8
30	1200	240
+7	280	56

Donc 37 x 48 = 1776

Proposez-leur de remplacer tous les zéros par des a. Vous obtiendrez donc :

	4a	+ 8
3a	12aa ou $12a^2$	24a
+7	28a	56

Ainsi, 4a signifie 40 ou 4 dizaines donc a = 1 dizaine = 10 et aa ou mieux a^2 = 1 dizaine x 1 dizaine = 10 x 10 = 100 donc a^2 = 1 centaine. Proposez d'ajouter la lettre b aux nombres 8, 7 et 56 qui sont des unités, donc 1b = 1 unité. Vous obtenez :

	4a	+ 8b
3a	$12a^2$	24ab
+7b	28ab	$56b^2$

Mentionnez aux élèves que les lettres a et b peuvent remplacer d'autres valeurs. Ainsi, a peut représenter les unités et b les dizaines et nous obtenons :

	4	+ 80
3	12	240
+70	280	5600

Donc 84 x 73 = 6132

Proposez maintenant a = b = 1 unité.

Donc nous obtenons :

	4	+ 8
3	12	24
+7	28	56

10 x 12 = 120

Et si a = b = 1 dizaine ?

	40	+ 80
30	1200	2400
+70	2800	5600

Problème 54

Reprenez le problème suivant (tiré du problème 53) :

	4a	+ 8b
3a	$12a^2$	24ab
+7b	28ab	$56b^2$

Mentionnez aux élèves que a = 1 unité. Prenez un grand carré de carton et convenez que, pour ce problème, ce grand carré représente l'unité car ses côtés mesurent 1 unité inconnue et son aire = 1 unité carrée.

Mentionnez-leur que le b est 10 fois plus petit que l'unité de longueur du carré. Demandez-leur de vous montrer la longueur de b. (**Solution** : C'est la longueur du côté du cube de 1 cm de côté.)

Demandez-leur quelle est l’aire du grand carré si a désigne la longueur de son côté. (**Solution** : a^2)

Demandez-leur quelle est l’aire du petit carré (une face du cube) si la longueur de son côté est b. (**Solution** : b^2)

Demandez-leur de décrire la réglette dont un côté a la même longueur que celle du grand carré (a) et dont l’autre côté a la même longueur que celle du côté du petit carré (b). (**Solution** : a et b sont les côtés, ab est l’aire.)

Assurez-vous maintenant que les élèves voient bien les divers rapports existant entre les aires de chacune des pièces de leur matériel, c’est-à-dire :

- Aire du grand carré = 10 x aire du rectangle ;
- Aire du grand carré = 100 x aire du petit carré ;
- Aire du rectangle = 10 x aire du petit carré ;
- Aire du rectangle = 1 dixième de l’aire du grand carré ;
- Aire du petit carré = 1 centième de l’aire du grand carré ;
- Aire du petit carré = 1 dixième de l’aire du rectangle.

Donc si a^2 = 1 unité :
ab = 0,1 ou 1 dixième de l’unité ;
b^2 = 0,01 ou 1 centième de l’unité.

Il vous reste à modifier le tableau original comme suit :

	4a	+ 8b
3a	$12a^2$	24ab
+7b	28ab	$56b^2$

	4	+ 0,8
3	12	2,4
+0,7	2,8	0,56

3,7 x 4,8 = 17,76

<u>Note</u> : Si vos élèves ne comprennent pas comment, par exemple, 24ab ou 24 dixièmes est devenu 2,4, prenez l’exemple de la monnaie : a = 1 \$, ab = 0,1 \$ ou 10¢ et 24ab = 2,40 \$. Pour b^2 : b^2 = 1¢ = 0,01 \$ donc $56b^2$ = 56¢ = 0,56 \$.

Proposez d’autres exemples semblables à la multiplication (4a + 8b) x (3a +7b) = $12a^2$ + 52ab + $56b^2$ devenue 4,8 x 3,7 = 17,76.

Problème 55

Tracez :

	3a	+ 4b
6c		
+7d		

Demandez ensuite aux élèves de remplir les cases du rectangle précédent.

	3a	+ 4b
6c	18ac	24bc
+7d	21ad	28bd

Annoncez à vos élèves que :

a = 1 dizaine
b = 1 unité
c = 1 unité
d = 1 dixième

Note : Deux lettres différentes peuvent représenter la même quantité. En effet, une lettre représente une variable, une quantité secrète et il n’y a aucun problème à ce que deux lettres représentent la même quantité secrète.

Demandez aux élèves de déterminer les valeurs de ac, bc, ad et bd.

ac = a x c = 10 x 1 = 10
bc = b x c = 1 x 1 = 1
ad = a x d = 10 x 0,1 = 1 (Voir note plus bas.)
cd = c x d = 1 x 0,1 = 0,1

Note : Pour ad = 1, rappelez, au besoin, que d est dix fois plus petit que l’unité et que a est dix fois plus grand que l’unité. Vous pouvez prendre un grand carré et le découper en languettes de 1 cm de largeur. Collez ces dix languettes à la suite une de l’autre.
Maintenant vous pouvez comparez la longueur de cette bande à celle du côté du carré original (10 fois plus long) et sa largeur à celle du côté original (10 fois plus court) et l’aire de la languette à celle du carré (aires égales).
Si vous le pouvez, faites réaliser cette expérience par vos élèves, ils s’en souviendront longtemps.

Il vous reste à modifier le tableau original en remplaçant les lettres par leurs valeurs. Vous obtenez donc :

	3a +	4b
6c	18ac	24bc
+7d	21ad	28bd

	30 +	4
6	$18\underline{0}$	24
+0,7	21	2,8

34 x 6,7 = 227,8

Proposez d'autres multiplications semblables en attribuant aux variables les mêmes valeurs.

<u>Problème 56</u>

Il reste à généraliser. Tracez :

	20 +	4	+ 0,3
5			
+0,7			

Demandez donc aux élèves de compléter ce rectangle.

	20 +	4	+ 0,3
5	$10\underline{0}$	20	1,5
+0,7	14	2,8	0,21

<u>Note</u> : Il est probable que certains élèves ne sauront pas où placer la virgule. Demandez-leur d'identifier dans quelle case se retrouveront des unités s'il faut multiplier :
- des dizaines par des unités (20 x 5) ;
- des dizaines par des dixièmes (20 x 0,7) ;
- des unités par des unités (4 x 5) ;
- etc.

Demandez-leur de pointer les cases où doivent se trouver des unités avant de trouver les nombres à insérer dans la grille. Faites de même en demandant où se trouveront les dizaines, les dixièmes, les centièmes.
En fait dès qu'une case est identifiée, le reste en découle. En effet, sur une même diagonale, ascendante de gauche à droite, on retrouve les mêmes valeurs (des unités ou des dizaines ou des dixièmes). Attention, le nombre 100 représente 100 unités, mais aussi 10 dizaines, il est sur la diagonale des dizaines. C'est pour cette raison qu'un zéro est souligné. Ce n'est pas le cas pour 20 qui sera considéré comme 20 unités et non 2 dizaines.
Enfin, la valeur de chaque diagonale est dix fois plus petite (si elle est à droite) ou dix fois plus grande (si elle est à gauche) de la valeur de sa voisine.

<u>Seizième activité</u>

La division.

Compétences disciplinaires :

1. **Associer la division de nombres décimaux au rectangle.**
2. **Trouver la longueur d'un rectangle connaissant son aire et sa largeur.**
3. **Associer le symbolisme de la division aux éléments correspondants du rectangle.**

Matériel

Matériel de base dix.

<u>Problème 57</u>

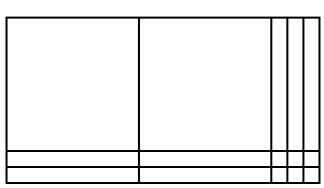
Demandez à vos élèves de représenter le nombre 276 avec le moins de pièces de matériel possible. (Donc 2 grands carrés, 7 rectangles et 6 cubes.)

Dites-leur qu'avec leur matériel, il faut daller un rectangle dont la largeur est égale à celle du grand carré plus celle de deux petits carrés.

Dessinez :

Demandez à vos élèves de commencer à gauche et de placer d'abord les pièces les plus grandes sans laisser d'espace libre.

Solution :



<u>Note</u> : Pour les élèves qui ne comprennent pas la consigne, utilisez la stratégie décrite dans la seconde note du problème 5 de ce chapitre.

Demandez-leur quelle est la longueur du rectangle.

Notez ensuite : 276 ÷ 12 = 23 en montrant que 276 représente le matériel, donc l'aire du rectangle, que 12 est sa largeur et que 23 est sa longueur. Proposez de la même façon les problèmes suivants.

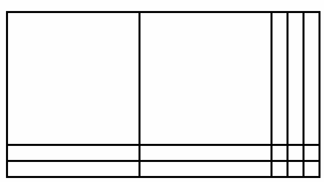
a) 374 d'aire et 11 de largeur ; (**Solution** : 374 ÷ 11 = 34)
b) 682 d'aire et 31 de largeur ; (**Solution** : 682÷31 = 22)
c) 168 d'aire et 12 de largeur ; (**Solution** : 168 ÷ 12 = 14)
d) 690 d'aire et 23 de largeur ; (**Solution** : 690 ÷ 23 = 30)
e) 860 d'aire et 20 de largeur ; (**Solution** : 860 ÷ 20 = 43)

Si vous devez donner d'autres problèmes semblables, assurez-vous qu'aucune transformation de matériel ne soit nécessaire. Au problème 59, des transformations seront nécessaires.

Problème 58

Les divisions concrètes du problème 57 vont maintenant être associées à la division symbolique.

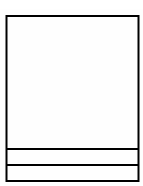
Au tableau, tracez :

12 

Écrivez :

$$276 \;\underline{|12\;}$$

Faites observer que, dans le dessin comme dans la construction concrète, deux sortes de dallages sont répétés. Il y a d'abord :



qui a été fabriqué deux fois, ce qui donnait une longueur de 20 unités ou de 2 dizaines et qui a nécessité l'utilisation de 2 plaques et 4 rectangles ou de 240 unités.

Poursuivez donc la notation symbolique en la justifiant :

$$\begin{array}{r|l} 276 & \underline{12\;} \\ \underline{-\,240} & \\ 36 & \end{array}$$

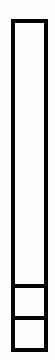
Nous avions 276 unités et nous en avons placé 240, il en reste 36 à placer.

$$\begin{array}{r|l} 276 & 12 \\ \cline{2-2} -240 & \text{D} \\ \cline{1-1} 36 & 2 \end{array}$$

Nous avons déjà un dallage de 20 unités ou de 2 D de longueur.

Note : La lettre D placée au-dessus du 2 évitera éventuellement des erreurs de valeur de position. Vous pouvez aussi écrire 20 qu'il faudra par la suite additionner à 3 unités. Voir plus bas.

Par la suite, il y a eu le modèle :



que nous avons utilisé trois fois afin de terminer notre dallage. Notons cela.

$$\begin{array}{r|l} 276 & 12 \\ \cline{2-2} -240 & \text{D} \\ \cline{1-1} 36 & 2 \\ -36 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc, nous avons utilisé les 36 unités qu'il restait, il ne reste plus rien 36 – 36 = 0.

$$\begin{array}{r|l} 276 & 12 \\ \cline{2-2} -240 & \text{DU} \\ \cline{1-1} 36 & 23 \\ -36 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

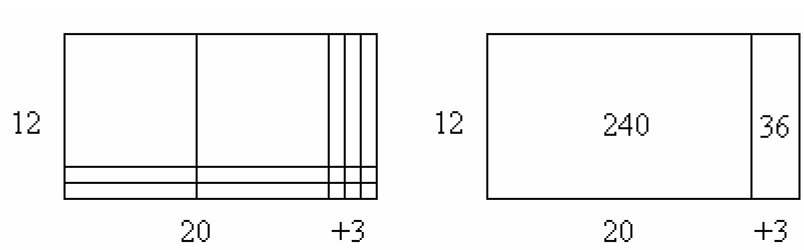
Ces 36 unités nous ont permis de prolonger notre dallage de 3 unités. Le dallage entier mesure donc 23 unités de longueur d'où 276 ÷ 12 = 23.

Note : La même division peut être aussi notée :

$$\begin{array}{r|r} 276 & 12 \\ \cline{2-2} -240 & 20 \\ \cline{1-1} 36 & +\ 3 \\ \cline{2-2} -36 & 23 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Le passage à la notation traditionnelle ne présente plus de difficultés.

Reprenez de la même façon les divisions du problème 57. C'est une excellente idée de noter, durant la progression des solutions, la largeur du rectangle correspondant aux symboles de l'algorithme. Vous obtiendrez donc à la fin :

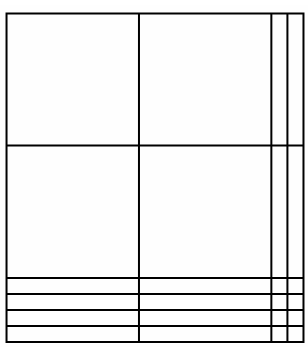


Problème 59

Les divisions suivantes demandent de transformer des plaques (centaines) en réglettes (dizaines) ou des réglettes (dizaines) en cubes (unités).

Invitez les élèves à représenter le nombre 528 avec leur matériel. Demandez-leur la longueur du rectangle de 24 unités de largeur dont l'aire est 528.

Solution :



528 ÷ 24 = 22

Note : Si les élèves ne pensent pas à échanger une plaque d'une centaine pour dix bandes d'une dizaine, laissez-les réfléchir un peu avant de leur demander s'il n'existe pas d'autres façons de représenter 528 avec leur matériel.
Vous verrez souvent que les élèves n'effectuent pas la transformation simplement parce qu'ils croient que ce n'est pas permis. Pour cette raison, il n'est pas utile de les laisser chercher longtemps.

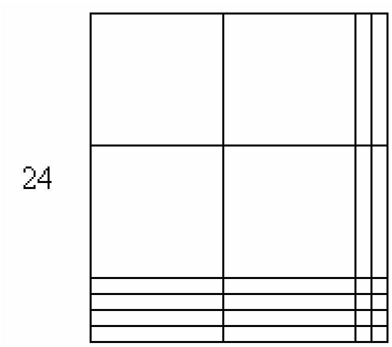
Proposez maintenant d'autres divisions telles :

a) 512 ÷ 16 (**Solution** : 32)
b) 315 ÷ 15 (**Solution** : 21)
c) 736 ÷ 32 (**Solution** : 23)
d) 600 ÷ 40 (**Solution** : 15)
e) 507 ÷ 13 (**Solution** : 39)

Problème 60

Reprenez les division du problème 59. Cette fois, il faudra les associer à l'algorithme de calcul. Procédez comme suit .

Tracez :



Demandez aux élèves de trouver, en considérant les colonnes verticales, combien il y a de modèles différents qui sont reproduits. (**Solution** : Il y en a 2 qui sont reproduits 2 fois chacun : le premier est formé de 2 carrés et de 4 rectangles et le second est formé de 2 rectangles et de 4 petits carrés.)

Demandez aux élèves quel nombre est représenté par le dallage construit avec le premier modèle (Solution : 480).

Écrivez :

528	24
-480	

- Quel nombre est représenté par le matériel non utilisé à ce moment ? (**Solution** : 48). Notez :

528	24
-480	
48	

- Quelle est la longueur du rectangle recouvert par ces 4 plaques et ces 8 réglettes ?

- (**Solution** : 20) Notez :

528	24
-480	D
48	2

- Quel nombre est représenté par le matériel qui recouvre la suite du dallage ? (**Solution** : 48).

- Est-ce qu'il reste du matériel non-utilisé ? (**Solution** : non)

- Quelle est la longueur de la partie recouverte par ces 48 unités ? (**Solution** : 2 unités)

Notez donc parallèlement aux réponses trouvées :

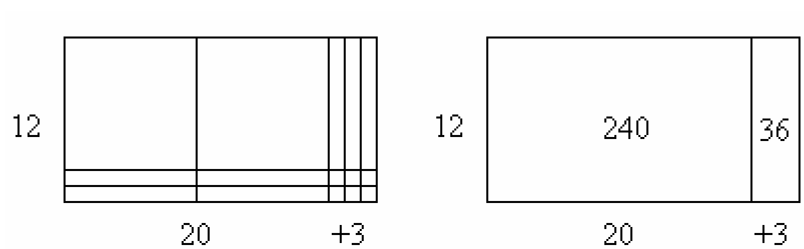
```
  528  |24
 -480  ----
 ----   DU
   48   22
  -48
  ---
    0
```

Donc 528 ÷ 24 = 22.

Procédez de la même façon avec les divisions du problème précédent.

Problème 61

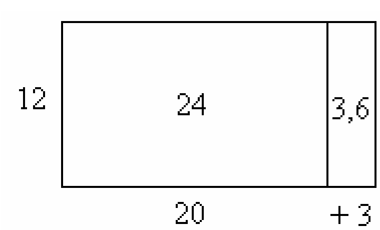
Au tableau tracez les deux schémas suivants que nous avons utilisés au problème 58.



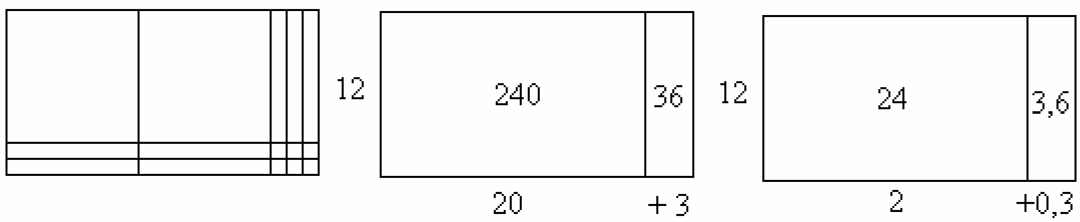
276 ÷ 12 = 23

Écrivez maintenant 27,6 ÷ 12 et demandez aux élèves de comparer 276 et 27,6. (**Solution** : 27,6 est 10 fois plus petit que 276.) Invitez-les à modifier les nombres 240 et 36 dont la somme était 276, afin que la nouvelle somme soit 27,6.

Solution :



Demandez-leur si le nombre 20 est encore bon. Sinon, que devient-il ? (**Solution** : 2, donc 10 fois plus petit lui aussi.) Et que devint 3 ? (**Solution** : 0,3). Effectuez donc les changements appropriés et assurez-vous d'avoir au tableau les trois dessins qui suivent.



Montrez les ressemblances entre ces représentations en faisant ressortir que, même si les symboles changent, le matériel n’a pas à être changé, il suffit de modifier la convention.

Écrivez maintenant :

$$\begin{array}{r|l} 276 & 12 \\ \cline{2-2} -240 & \text{DU} \\ \cline{1-1} 36 & 23 \\ -36 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27{,}6 & 12 \\ \cline{2-2} -24{,}0 & \text{U d} \\ \cline{1-1} 3{,}6 & 2{,}3 \\ -3{,}6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Assurez-vous que les élèves voient bien les ressemblances et les différences entre ces deux algorithmes. Tirez la conclusion que la seconde division s’effectue comme la première, mais qu’il ne faut pas oublier la virgule.

Mais que faire, si nous oublions la virgule ?

Proposez aux élèves les divisions suivantes.

a) 2760 ÷ 12 = 23
b) 2,76 ÷ 12 = 23
c) 2,76 ÷ 1,2 = 23

Mentionnez que la virgule a été oubliée mais qu’il est possible de savoir où la placer simplement en faisant une estimation ou un calcul arrondi.

En (a) : 2000 ÷ 10 …2, 20, 200, 2000 ou … Comme la réponse est 200, il faudra changer 23 pour 230.

En (b) : 2 ÷ 10 = ? (**Solution** : C’est moins que 1, c’est 2 dixièmes, donc 2,76 ÷ 12 = 0,23.)

En (c) 2 ÷ 1 = ? (**Solution** : 2 ÷ 1 = 2, donc 2,76 ÷ 1,2 = 2,3.)

Proposez d’autres exercices semblables qui montrent que les divisions impliquant des entiers et celles impliquant des nombres à virgule peuvent être réalisées de la même manière. Il faut simplement, à la fin, effectuer un calcul arrondi pour s’assurer de la place de la virgule.

Problème 62

Demandez aux élèves d'effectuer la division suivante au moyen de l'algorithme symbolique :
1000 ÷ 8.

Notes :
1. Si les élèves éprouvent des difficultés, remettez leur 10 grands carrés en leur demandant de former 8 ensembles identiques. Laissez-les effectuer les transformations concrètes nécessaires et montrez comment leur travail concret correspond à la technique symbolique.
2. Nous venons d'utiliser le partage comme illustration de 1000 ÷ 8. Ce n'est plus un problème car l'association de la division au rectangle devrait maintenant être solide. Cette association au partage ne nécessite pas ici que les dix plaques soient remplacées par cent réglettes.

Notez :

$$\begin{array}{r|l}
1000 & 8 \\ \cline{2-2}
\underline{-800} & \text{CDU} \\
200 & 125 \\
\underline{-160} & \\
40 & \\
\underline{-40} & \\
0 &
\end{array}$$

Demandez maintenant aux élèves d'effectuer 100 ÷ 8. Commencez donc à noter comme suit :

$$\begin{array}{r|l}
100 & 8 \\ \cline{2-2}
\underline{-80} & \text{DU} \\
20 & 12 \\
\underline{-16} & \\
4 &
\end{array}$$

Comment diviser ces 4 unités en 8 ? Laissez vos élèves réfléchir. Au besoin, traces dix grands carrés en mentionnant que chacun représente cette fois une dizaine. Vos élèves penseront certainement à remplacer 4 réglettes par 40 cubes. Et vous pourrez terminer les calculs.

$$\begin{array}{r|l}
100 & 8 \\ \cline{2-2}
\underline{-80} & \text{DU d} \\
20 & 12{,}5 \\
\underline{-16} & \\
40 & \\
\underline{-40} & \\
0 &
\end{array}$$

Note : Le fait d'écrire D et U pour désigner les dizaines et les unités permettra d'éviter la réponse 125 et permettra aux élèves de comprendre que le 5 représente les dixièmes que l'on désignera par d.

Continuez de la même façon avec 10 ÷ 8 puis avec 1 ÷ 8.

Problème 63

Comme au problème précédent, proposez aux élèves la division 100 ÷ 3.

Note : Laissez-les constater que cette division n'a pas de fin, ce qui est indiqué par $100 \div 3 = 33,\overline{3}$ où le trait au-dessus du 3 montre que le 3 se répète indéfiniment.

Proposez maintenant 20 ÷ 9. (**Solution** : $2,\overline{2}$).

Enfin 40 ÷ 7 (**Solution** : 5, 7142… Cette fois, il semble que les chiffres ne se répètent pas, mais c'est une illusion. En effet, il suffit d'aller un peu plus loin pour constater que la suite 571428 se répète sans cesse. Ainsi, on aura : $40 \div 7 = 5,71428\overline{571428}$.

Une recherche intéressante

Demandez à vos élèves de trouver, avec leur calculatrice, des divisions qui donnent des périodes de longueurs différentes. (La période est la partie qui se répète. Le nombre $6,\overline{14}$ est donc un nombre périodique.)

Note : Certains nombres ne sont pas périodiques, c'est le cas de π. Sur internet, vos élèves peuvent faire une recherche en tapant pi ou nombre+pi.