Chapitre 5

Multiplier, diviser, factoriser, extraire la racine carrée

Les activités de ce chapitre peuvent sembler difficiles lorsqu'on considère le titre ci-haut. Ne croyez pas cela, le travail avec du matériel simple et concret permet d'attribuer à une opération, telle extraire la racine carrée, son sens véritable qui est à la portée de tout élève de six ans.

Durant les activités qui suivent, voici les comportements que l'élève devrait manifester de plus en plus :

- Compréhension : L'élève ne devrait pas hésiter à considérer qu'en tournant une figure, on ne change pas cette figure. De plus, il ne devrait pas hésiter à considérer qu'un carré situé dans le coin d'un rectangle appartient à la fois à deux des côtés de ce rectangle.
- Raisonnement : L'élève réagit au conflit cognitif, c'est-à-dire qu'il perçoit une contradiction. Dans ce chapitre, il pourra justifier pourquoi un carré occupant le coin d'un rectangle doit être considéré pour chacun des deux côtés du rectangle dont il est le coin.
- Efficacité : L'élève se familiarisera avec de nouveaux symboles : x, √ et ÷. De plus, il continuera à s'habiliter à tracer les chiffres, à les reconnaître et à les lire.

Dans ce chapitre, l'élève se familiarisera avec le concept de multiplication. Vous verrez que le rapprochement entre la multiplication et l'addition répétée a été complètement évité. Ceci est important et intentionnel. En fait, certaines multiplications peuvent remplacer une addition répétée, mais cela n'est pas toujours le cas. Or, en associant d'abord la multiplication à l'addition répétée, on prépare l'élève à des apprentissages ardus lorsqu'il tentera de comprendre entre autres que ½ x ½ = ¼ ou que $a \times a = a^2$.

C'est en associant la multiplication, la division, la factorisation et la racine carrée à un rectangle que nous développerons ces concepts. La division ne sera pas associée à un partage ou à une mesure car ici encore cela conduit à de nombreuses difficultés que peu d'adultes réussissent à éviter.

En fait, le rectangle peut illustrer toutes les multiplications et toutes les divisions. Ce modèle constituera donc pour l'élève l'image mentale privilégiée qui le guidera dans sa compréhension des problèmes qui sollicitent soit la multiplication, soit la division, soit la factorisation, soit l'extraction d'une racine carrée.

Matériel

30 cubes ou tuiles carrées d'environ 1 cm à 2 cm de côté.

Problème 1

Demandez à l'élève ce qu'est un rectangle. Demandez-lui de vous montrer des objets où il peut observer un rectangle.

Discutez avec lui de ce qu'est un rectangle en vous assurant de faire ressortir que le rectangle :

- possède exactement quatre coins ;
- et que ces quatre coins sont identiques (comme les coins d'une feuille de papier) .

Montrez maintenant quelques carrés et demandez-lui si ce sont des rectangles.

Notes : 1. Tous les carrés sont des rectangles car ils ont exactement quatre angles droits. En fait, ce sont des « rectangles améliorés », c'est-à-dire des rectangles qui doivent respecter une condition supplémentaire : posséder quatre côtés de même longueur.

Ainsi, tous les carrés sont des rectangles alors que certains rectangles sont des carrés.

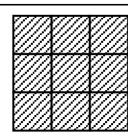
2. Dans les problèmes qui suivent, au besoin, rappelez à l'élève ce qu'est un carré et ce qu'est un rectangle.

Problème 2

Remettez le matériel (cubes ou tuiles carrées) à l'élève.

- Avec 9 tuiles (ou cubes), nous pouvons recouvrir un plancher qui a la forme d'un carré. Construis ce plancher.

Note : Voici la solution acceptée :



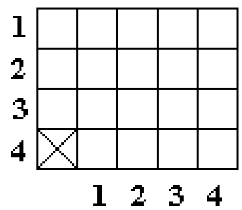
Certains élèves se contentent de faire le tour du carré, ne plaçant aucune pièce au centre et n'utilisant ainsi que huit pièces. Si l'élève agit ainsi, dites-lui que ce plancher est bien dangereux avec un trou au centre, qu'il faut combler ce trou.

- On dit que 9 est un nombre carré, pourquoi ? (Avec 9 pièces, on peut faire un carré.)

Problème 3

- Peux-tu faire un carré qui soit juste un peu plus grand que celui-là ? (Oui , avec 16 pièces) .
- Peux-tu en faire un autre qui soit encore un peu plus grand ? (Oui, avec 25 pièces.)

<u>Note</u> : Certains élèves font régulièrement un rectangle, tel le suivant, au lieu d'un carré :



Quand vous leur demandez si les côtés sont tous égaux, ils les comptent tel qu'illustré en ne comptant qu'une fois le carré du coin marqué d'un X. En fait, ils ont encore de la difficulté à comprendre qu'un élément puisse appartenir en même temps à deux ensembles distincts.

Il faut créer un conflit cognitif (Ça ne fait pas mal !) de la façon suivante :

- Nous allons vérifier. Commence cette fois en comptant les pièces du haut.

Il en trouvera cinq. Montrez votre étonnement et demandez-lui de dénombrer les pièces de droite. Il risque de n'en trouver que trois s'il répète son erreur originale. Étonnez-vous encore une fois : « Comment se fait-il que cela ne donne pas toujours quatre ? » Laissez l'élève réfléchir à ce problème.

Évitez de lui expliquer comment résoudre cette difficulté. Il doit y parvenir seul, quitte à laisser le problème de côté pour l'instant et à y revenir dans quelques jours. Contentez-vous donc de bien faire ressortir le problème posé par le dénombrement des bords du carré.

<u>Problème 4</u>

- Nous savons que les nombres 9, 16 et 25 sont des carrés. Quelle est la longueur du côté d'un carré de 25 pièces ? (5 pièces)
- Et maintenant, quelle est la longueur du côté d'un carré de 9 pièces ? (3 pièces)
- Bon, c'est un peu long de répéter chaque fois « Quelle est la longueur du côté d'un carré de 9 ou de 25 pièces ? » Désormais, je vais l'écrire comme ceci $\sqrt{9}$ ou $\sqrt{25}$. Ce signe, est un symbole secret qu'utilisent les grands mathématiciens pour dire « Quelle est la longueur du côté d'un carré qui a 9 ou 25 pièces ? »

<u>Note</u> : C'est peut-être la première fois que l'élève symbolise ou lit un nombre plus grand que neuf. Pour l'instant, contentez-vous de lui lire ce nombre, sans l'expliquer. Il est trop tôt pour percevoir ce qui se cache sous la numération positionnelle. Procédez de la même façon chaque fois que vous utiliserez des nombres à plusieurs chiffres notés en numération positionnelle (10, 11, 12,…).

- Voyons maintenant si tu peux découvrir ce que les grands mathématiciens veulent dire lorsqu'ils écrivent : $\sqrt{9}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{1}$? (3, 2, 1)

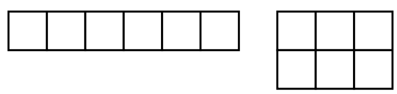
<u>Note</u> : Allez, un peu de courage ! Il n'y a qu'aux adultes que le symbole « $\sqrt{}$ » fait peur.

<u>Problème 5</u>

Voici un problème pour les as : $\sqrt{6}$.

<u>Note</u> : 6 n'étant pas un carré parfait, l'élève ne pourra solutionner ce problème. Laissez-le chercher un peu et vous expliquer ce qui ne va pas. (Il faudrait en enlever 2 ou en ajouter 3, à moins de couper les pièces.)

Dites-lui qu'avec six pièces, il n'est vraiment pas possible de faire un carré, mais peut-on faire un rectangle ?

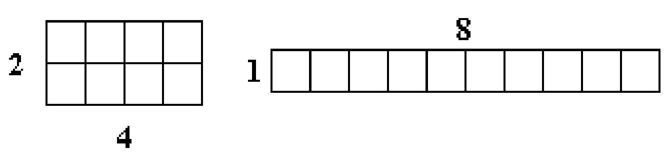
Solution : il y en a deux : 

Laissez l'élève trouver ces deux solutions et dessinez-les. Faites remarquer que même si un rectangle est tourné, c'est le même rectangle.

<u>Problème 6</u>

- Quels rectangles peux-tu faire avec 8 pièces ?

Lorsqu'il aura trouvé les deux rectangles, dessinez-les comme suit en ajoutant les nombres qui désignent leurs côtés :



- Et maintenant, je vais te dire un autre secret des grands mathématiciens. Lorsqu'il pensent au premier rectangle, ils écrivent 2 x 4 ou 4 x 2. Sais-tu ce qu'ils écrivent lorsqu'ils pensent au deuxième rectangle ? (1 x 8 ou 8 x 1)

Note : 1 x 8 ou 8 x 1 désignent le même rectangle, rappelez-vous que l'orientation de ce rectangle n'a aucune importance.

Problème 7

- Voyons maintenant si tu connais les secrets des grands mathématiciens. Montre les rectangles auxquels ils pensent lorsqu'ils écrivent :

  a) 3 x 2
  b) 5 x 1
  c) 3 x 3
  d) 2 x 4
  e) 1 x 6
  f) 2 x 2
  g) $\sqrt{9}$
  h) $\sqrt{4}$
  i) $\sqrt{1}$

Problème 8

- On peut faire des familles de rectangles. Ainsi, il y a les rectangles qui ont tous un côté mesurant trois unités ou trois pièces de largeur. Trouve cinq rectangles de cette famille et place-les du plus petit au plus grand.

Laissez l'élève trouver diverses solutions, dessinez-les en demandant chaque fois si le nouveau rectangle appartient à la famille de ceux qui ont au moins un côté mesurant trois unités.

Demandez à l'élève comment les grands mathématiciens symbolisent chacun de ces rectangles. Placez ensuite ces symbolisations en ordre comme ceci : 1 x 3, 2 x 3, 3 x 3, 4 x 3… ou comme ceci : 3 x 1, 3 x 2, 3 x 3, 3 x 4…

Demandez à l'élève s'il sait comment prolonger les suites précédentes. Pour chaque nouvelle symbolisation, demandez-lui de vous décrire le rectangle. (ex. : Il y a trois tuiles de longueur et quatre tuiles de largeur.)

Problème 9

- Je connais deux rectangles qui appartiennent à la même famille. Dans cette famille, tous les rectangles ont la même largeur. Il faut dix pièces pour faire le premier rectangle et quinze pour faire le second. Montre ces deux rectangles et dis à quelle famille ils appartiennent.

Note : Il s'agit des rectangles 2 x 5 et 3 x 5. Certes, les rectangles 1 x 10 et 1 x 15 peuvent satisfaire aux exigences du problème, mais ceci est trop facile puisque tous les nombres entiers appartiennent à la famille du 1.

Ce problème sert à trouver le facteur commun (c'est-à-dire le côté commun) des nombres 10 et 15.

Problème 10

- Dans la famille du quatre, il y a deux nombres qui sont plus grands que dix mais plus petits que vingt. Peux-tu construire les rectangles qui les représentent ? (Solution : 3 x 4 et 4 x 4)

Problème 11

- Quelle est la longueur d'un rectangle construit avec quatorze pièces si la largeur de ce rectangle est de deux pièces ? (Solution : 7 pièces de longueur)
- Quelle est la longueur d'un rectangle construit avec dix-huit pièces si la largeur de ce rectangle est de trois pièces ? (Solution : 6 pièces de longueur)
- Quelle est la longueur d'un rectangle construit avec vingt pièces si la largeur de ce rectangle est de cinq pièces ? (Solution : 4 pièces de longueur)

Problème 12

Note : Relisez la première note du problème 4.

- Il est temps que je te dise un autre secret des mathématiciens. Lorsqu'ils pensent aux trois problèmes précédents (ceux du problème 11), ils écrivent 14/2 ou 14 ÷ 2; 18/3 ou 18 ÷3 ; 20/5 ou 20 ÷ 5 (Note : En écrivant une division sous la forme d'une fraction, tracez le trait horizontalement).

Rappelez-lui les énoncés correspondants et assurez-vous qu'il comprend la symbolisation.

Note : Vous avez sans doute remarqué que nous avons évité de représenter par des égalités les différents rectangles. Nous avons noté √16 et non √16 = 4, 3 x 4 et non 3 x 4 = 12, 20/5 et non 20/5 = 4. En fait, nous ne voulons pas que l'élève pense que 3 x 4 ou √16 ou… représente un problème qui est noté à gauche du signe d'égalité alors que12, 4 ou … représente la réponse au problème et doit être noté à droite. Ceci lui évitera des difficultés futures (dans un cas tel 3 x 4 = 5 + 7) et de plus, ceci évite d'attribuer un sens inexact à l'égalité.

Problème 13

- Des mathématiciens se sont échangé des message secrets. Peux-tu découvrir à quel rectangle ils pensaient lorsqu'ils ont écrit :

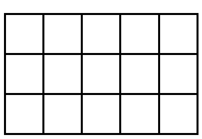
  a) 5 x 2
  b) 12/3
  c) √9
  d) 3 x 4
  e) 10/5
  f) √1
  g) 4 x 4
  h) 8 ÷ 2
  i) 6 x 1
  j) 12 ÷6
  k) 1 x 1
  l) 7 ÷ 7

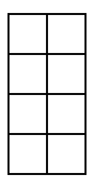
Problème 14

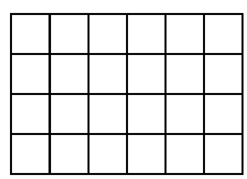
Tracez un carré à 16 cases et demandez à l'élève de le symboliser de toutes les façons possibles. (Solutions : √16, 4 x 4, 16/4 et 16 ÷ 4.)

Problème 15

Tel qu'au problème 14, avec les rectangles suivants :

a) 

b) 

c) 

Solutions :

a) 3 x 5, 5 x 3, 15/5, 15/3, 15 ÷ 5 et 15 ÷ 3 ;
b) 2 x 4, 4 x 2, 8/2, 8/4, 8 ÷ 2 et 8 ÷ 4 ;
a) 4 x 6, 6 x 4, 24/6, 24/4, 24 ÷ 6 et 24 ÷ 4 ;

Note : Les symbolisations précédentes représentent le rectangle et non le problème et elles seront trouvées après la construction du rectangle.

Au besoin, reprenez de temps à autres des problèmes semblables aux problèmes 13 et 14 afin que l'élève n'oublie pas les diverses symbolisations présentées dans ce chapitre.